2. Vorlesung Wintersemester

1 Mechanik von Punktteilchen

Ein Punktteilchen ist eine Abstraktion. In der Natur gibt es zwar Elementarteilchen (Elektronen, Neutrinos, usw.), von denen bisher keine Ausdehnung bekannt ist, aber ein Punktteilchen für die klassische Mechanik kann auch etwas wie die Sonne sein.

Wann kann man etwas als Punktteilchen betrachten? Wenn sein Zustand allein durch seine Lage charakterisiert ist. Ein Punktteilchen kann sich also vor allem nicht drehen! Ein Stern kann sich in diesem Sinne wie ein Punktteilchen bewegen, solange innere Drehung oder andere innere Bewegungen keine Rolle spielen. Aber auch für solche inneren Bewegungen bleibt die Punktteilchenannahme gut, wenn sie die Bewegung des Körpers als Ganzes nicht beeinflussen.

2 Mathematische Formulierung

Der Zustand eines Punktteilchens in der klassischen Mechanik ist also durch seinen Ort im Raum gegeben, der wiederum von der Zeit abhängt. Als Vektor geschrieben ist das

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)). \tag{1}$$

Vektoren werden mit einem Pfeil, in vielen Büchern auch als fette Buchstaben gekennzeichnet (in alten auch manchmal als deutsche Frakturbuchstaben). An der Tafel eignet sich der Pfeil am besten.

In dieser einfachen Vorstellung steckt noch die stillschweigende Annahme, dass Raum und Zeit kontinuierlich sind. Ob das stimmt, ist immer noch eine aktuelle Fragestellung der Physik, es gibt aber bisher keinen Grund, davon abzugehen.

3 Überblick über die Vektorrechnung

Physikalische Größen kann man klassifizieren als

Skalare : diese sind durch eine Zahl (mit Maßeinheit) festgelegt. Beispiele sind Masse, Temperatur.

Vektoren : sie haben zusätzlich noch eine Richtung. Beispiele: Ortsvektor, Geschwindigkeit, Kraft.

Tensoren : sie enthalten zwei oder mehr Richtungen. Kommen erst im zweiten Semester vor.

Vektoren und Tensoren können in beliebiger Dimension vorliegen. Für jetzt benötigen wir 2- und 3-dimensionale Vektoren, in der Relativitätstheorie dann auch vierdimensionale. In der Physik kommen bis zu ∞-dimensionale vor.

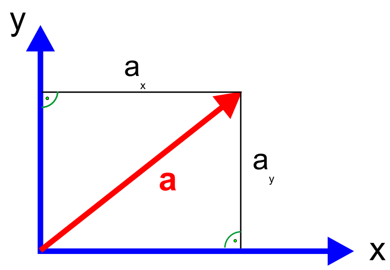
Anschaulich kann man einen Vektor als Strecke mit einer gegebenen Richtung und Länge darstellen, der eine Verschiebung von einem Punkt im Raum zu einem anderen angibt. Der Ortsvektor ist der Vektor, der vom Ursprung an einen gegebenen Ort verschiebt.

Einfache Eigenschaften und Operationen:

- Der Vektor $-\vec{a}$ ist der Vektor mit derselben Länge wie $\vec{a}$ und umgekehrter Richtung.
- Multiplikation mit einem Skalar: $c\vec{a}$ hat dieselbe Richtung und ist um den Faktor c gestreckt oder verkürzt.
- Der Nullvektor $\vec{0}$ ist der Vektor mit Länge 0, er hat keine Richtung. Der Vektorpfeil wird meist weggelassen.
- Addition: die Vektoren werden als Verschiebungen aneinandergesetzt. Es gelten Kommutativität $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, Assoziativität $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ und Distributivität $c(\vec{a}+\vec{b})=c\vec{a}+c\vec{b}$ sowie $(c+d)\vec{a}=c\vec{a}+d\vec{a}$.
- Subtraktion: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$. Wichtige Formel: der Verbindungsvektor zweier Punkte $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ mit Richtung zu $\vec{r}_1$ hin ist $\vec{r}_1-\vec{r}_2$

4 Komponentendarstellung

Für die Rechnung mit Vektoren benutzt man die Komponentenzerlegung durch senkrechte Projektion auf die Koordinatenachsen.



Der Vektor $\vec{a}$ ist damit in zwei Dimensionen durch $\vec{a}=(a_x,a_y)$ bzw. in drei Dimensionen durch (a_x,a_y,a_z) gegeben. In dieser Vorlesung machen wir keinen Unterschied zur senkrechten Anordnung, z. B.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Damit kann die Multiplikation mit Skalaren und die Addition einfach geschrieben werden:

$$c\vec{a}=(ca_x,ca_y,ca_z), \qquad \vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z). \tag{3}$$

5 Einheitsvektoren

Die *Einheitsvektoren* $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ haben die Länge eins und zeigen in die Richtung der jeweiligen Achse. Dabei sind die Achsenrichtungen so zu wählen, dass bei einer 90°-Drehung im mathematisch positiven Sinne (d.h. gegen den Uhrzeigersinn) um die z-Achse die x-Achse in die y-Achse übergeht. Das definiert das standardmäßige *rechtshändige Koordinatensystem.*

Die Zerlegung nach Komponenten sieht jetzt so aus:

$$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z. \tag{4}$$

Es ist oft einfacher zu schreiben, wenn man die Koordinatenrichtungen durchnummeriert: $x \to 1$, $y \to 2$, $z \to 3$. Dann wird die Gleichung zu

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i. \tag{5}$$

6 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i. \tag{6}$$

Man kann es auch berechnen über (wird später plausibel).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi, \tag{7}$$

wobei $|\vec{a}|$ der Betrag = die Länge des Vektors $\vec{a}$ ist und ϕ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist Null!

Es gilt

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x, \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y, \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{e}_z. \tag{8}$$

Allgemein gibt das Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor die *Projektion* auf diese Richtung an. Die Komponentenzerlegung (5) lässt sich damit auch wie folgt schreiben:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} (\vec{a} \cdot \vec{e}_i)\vec{e}_i. \tag{9}$$

Das Skalarprodukt ist kommutativ und distributiv:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \qquad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \tag{10}$$

Damit sieht man auch die Äquivalenz von (6) und (7): für die Einheitsvektoren gilt wegen $\cos 0 = 1$ und $\cos(\pi/2) = 0$:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{array} \right\} =: \delta_{ij}. \tag{11}$$

δ_{ij} ist das sogenannte *Kronecker-Symbol* und wird bei gleichen Indizes Eins und sonst Null.

Damit rechnet man mit (10) aber aus

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z) \cdot (b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{12}$$

Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos 0 = |\vec{a}|^2, \tag{13}$$

woraus man die Rechenregel

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{14}$$

ableitet. In zwei Dimensionen ist das der Satz des Pythagoras.

Für $|\vec{a}|$ wird auch oft einfacher a geschrieben.

7 Das Vektorprodukt

Das Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{15}$$

erzeugt einen neuen Vektor $\vec{c}$, der so definiert ist:

- sein Betrag ist $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\phi$ (mit ϕ wieder dem Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$) und
- die Richtung ist senkrecht auf den Richtungen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, und zwar so, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein rechtshändiges System bilden.

Das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren ist der Nullvektor!
Das Vektorprodukt ist distributiv, aber weder kommutativ noch distributiv:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \qquad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \qquad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}. \tag{16}$$

Die Komponentendarstellung des Vektorproduktes kann man dann aus den Vektorprodukten der Einheitsvektoren gewinnen. Aus

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = -\vec{e}_x \times \vec{e}_z = \vec{e}_y \tag{17}$$

folgt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x). \tag{18}$$

Das Vektorprodukt ist nur im dreidimensionalen Raum definierbar.

8 Geschwindigkeit in einer Dimension

Wenn sich ein Punktteilchen in einer Dimension gemäß $x(t)$ bewegt, ist es natürlich, aus der naiven Definition Geschwindigkeit = (zurückgelegte Strecke)/(dafür benötigte Zeit) folgendes zu versuchen:

$$v(t, \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{19}$$

Das zeigt zwei Dinge:

1. Es handelt sich dabei um die *Durchschnittsgeschwindigkeit* während des Messintervalls Δt.
2. Die Geschwindigkeit hat ein Vorzeichen, das davon abhängt, ob x während des Messintervalls zu- oder abnimmt.

Von der Durchschnittsgeschwindigkeit kommt man zur momentan zum Zeitpunkt t vorliegenden über den Grenzwert:

$$v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t). \tag{20}$$

Die Notation der Zeitableitung als ein Punkt über der Funktion stammt von Newton und wird häufig benutzt.

Das ist also die Definition der Geschwindigkeit (engl. *velocity*)

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t). \tag{21}$$

9 Geschwindigkeit als Vektor

Für den zwei- oder dreidimensionalen Raum bildet man analog

$$\vec{v}(t, \Delta t) = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \tag{22}$$

Im Grenzwert gegen Null wird daraus:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t). \tag{23}$$

10 Differentiation von Vektoren

Wie ist diese Ableitung eines Vektors zu verstehen? Schreiben wir (23) in Komponenten (der Kürze halber in 2 Dimensionen):

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= (v_x(t),\ v_y(t)) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},\ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) && (24) \\
&= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right) && (25) \\
&= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).
\end{aligned}$$

Es gilt also die naheliegende Regel, dass man eine Vektorfunktion der Zeit differenziert, indem man die Komponenten einzeln differenziert.

11 Die Beschleunigung

Nach der Definition der Geschwindigkeit können wir die der Beschleunigung = Änderung der Geschwindigkeit in einem gegebenen Zeitintervall sofort hinschreiben:

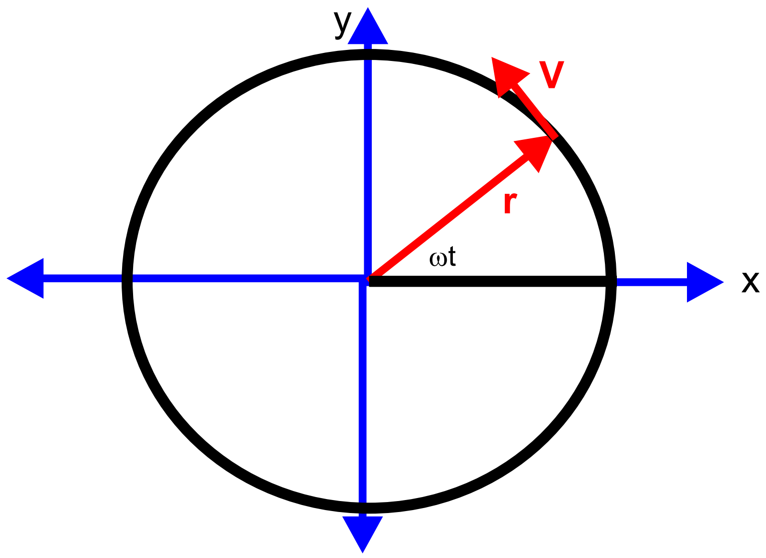
$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{26}$$

Der heute meist verwendete Buchstabe a kommt vom englischen Ausdruck *acceleration*.

Damit bleibt die Definition

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t). \tag{27}$$

12 Beispiel: die gleichförmige Kreisbewegung



Eine einfache aber auch sehr nützliche Anwendung ist die gleichförmige Kreisbewegung. Ein Massenpunkt bewege sich auf dem Kreis mit Radius R mit konstanter *Winkelgeschwindigkeit* ω, d. h. der Winkel ϕ zur x-Achse ändere sich mit der Zeit gemäß $\phi = \omega t$. Dann ist der Ortsvektor in der Ebene

$$\vec{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t). \tag{28}$$

Winkel werden, wenn nicht anders gesagt, immer im Bogenmaß gemessen, so dass der Kreis zwischen $\phi = 0$ und $\phi = 2\pi$ aufgespannt wird. Einer vollen Drehung entspricht die Umlaufzeit T mit

$$\omega T = 2\pi \text{ oder } T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{29}$$

Die Geschwindigkeit ist

$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t). \tag{30}$$

Man beachte, dass $\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = 0$ ist, d. h. die Geschwindigkeit steht immer senkrecht zum Ortsvektor, also tangential zum Kreis. Der Betrag der Geschwindigkeit ist $|\vec{v}| = R\omega$.

Die Beschleunigung ist ebenso einfach:

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R(\cos\omega t, \sin\omega t) = -\omega^2\vec{r}(t). \tag{31}$$

Bei einer Kreisbewegung wirkt also immer eine Beschleunigung, die radial nach innen gerichtet ist: die *Zentripetalbeschleunigung*.

Es gibt eine sehr nützliche und häufig verwendete Darstellung der Geschwindigkeit. Dazu geht man in den dreidimensionalen Raum und definiert den Vektor $\vec{\omega}$ mit Betrag ω, der senkrecht auf der Drehebene steht und die Drehrichtung im mathematisch positiven Sinne wiedergibt: in unserem Fall ist also $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$. Damit kann man aber leicht nachrechnen, dass die nützliche Beziehung

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}\times\vec{r}(t) \tag{32}$$

für die Drehbewegung gilt. Das ist jetzt vom Koordinatensystem unabhängig und bleibt übrigens auch richtig, wenn sich ω mit der Zeit ändert.