3. Vorlesung Wintersemester

1 Parameterdarstellung von Kurven

Wir haben gesehen, dass man die Bewegung von Punktteilchen durch einen zeitabhängigen Ortsvektor darstellen kann. Genauso kann man aber auch Kurven im Raum darstellen, indem man die Menge der Punkte $\vec{r}(t)$, $t = t_1 \dots t_2$ betrachtet. Da t dann nicht mehr die Rolle der Zeit spielt, benutzt man besser einen anderen Buchstaben, z. B. u. So ist z. B. der Kreis durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(u) = R(\cos u, \sin u), \quad u = 0 \dots 2\pi \tag{1}$$

gegeben. Meist ist die Parameterdarstellung einfacher als etwa die $y(x)$-Form. So ist der Kreis in dieser durch

$$y(x) = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad x = -R \dots R \tag{2}$$

gegeben, also durch eine mehrdeutige Funktion.

Man beachte, dass die Parameterdarstellung nicht eindeutig ist: statt (1) kann man etwa auch

$$\vec{r}(u) = R(\cos u^2, \sin u^2), \quad u = 0 \dots \sqrt{2\pi} \tag{3}$$

verwenden. Eine "natürliche" Parametrisierung bietet nur die *Bogenlänge* (engl. *arc length*).

2 Bogenlänge von Kurven

Die Länge einer gekrümmten Kurve kann man auch wieder aus einem Grenzwert bestimmen. Zunächst zerlegt man die Kurve in einzelne Abschnitte zwischen den Punkten zu den Parameterwerten

$$u_a = u_1,\ u_1 + \Delta u,\ \dots u_{N+1} = u_b \text{ in } N \text{ Intervalle mit } \Delta u = (u_b - u_a)/N. \tag{4}$$

Mit $u_i = u_1 + (i-1)\Delta u$ ist dann Folgendes eine Näherung für die Länge der Kurve

$$S(u_a, u_b) = \sum_{i=1}^{N} |\vec{r}(u_{i+1}) - \vec{r}(u_i)|. \tag{5}$$

Um zum Grenzwert zu kommen, wird das umformuliert zu

$$S(u_a, u_b) = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\vec{r}(u_{i+1}) - \vec{r}(u_i)|}{\Delta u} \Delta u, \tag{6}$$

was für $\Delta u \to 0$ in

$$S(u_a, u_b) = \int_{u_a}^{u_b} \left| \frac{\mathrm{d}\vec{r}(u)}{\mathrm{d}u} \right| \mathrm{d}u \tag{7}$$

übergeht.

Beispiel: nehmen wir den Kreis mit der Zeit als Parameter:

$$\vec{r}(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t) \tag{8}$$

Es war ja

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right| = R\omega, \tag{9}$$

und damit wird die Bogenlänge zu

$$S(t_1, t_2) = R\omega(t_2 - t_1) = R(\phi_2 - \phi_1). \tag{10}$$

Das ist der korrekte Ausdruck für Winkel im Bogenmaß.

Die aus der Schule bekannte Formel für die Kurvenlänge eines Funktionsgraphen $y(x)$ erhält man mit der Parametrisierung $x(t) = t$ und $y(t) = y(x(t))$:

$$\frac{\mathrm{d}(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = (1, y'(t)) \qquad \Rightarrow \qquad S(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Man kann nun die Bogenlänge s als neuen Parameter berechnen, indem man sie von einem gegebenen Anfangspunkt u_0 bis zu einem variablen Endpunkt u aufintegriert:

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(u')}{\mathrm{d}u'}\right| \mathrm{d}u'. \tag{12}$$

Dabei wird u' geschrieben, um die Integrationsvariable von der oberen Grenze zu unterscheiden.

Finden der Umkehrfunktion $u(s)$ und Einsetzen in $\vec{r}(u(s))$ liefert die gewünschte natürliche Parametrisierung der Kurve $\vec{r}(s)$

Für die Bogenlänge als Parameter, $\vec{r}(s)$, muss dann

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s}\right| = 1 \tag{13}$$

sein.

3 Grundlagen der Mechanik

3.1 Kinematik und Dynamik

Die *Kinematik* beschäftigt sich mit der Beschreibung von Bewegungen: Begriffe wie Geschwindigkeit und Beschleunigung und der Zusammenhang mit den Bahnkurven gehören dazu. In der *Dynamik* untersucht man dagegen die Ursache der Bewegungen: Kräfte und ihre Wirkungen.

3.2 Absolutheit von Zeit und Raum

Die Zeit ist eine absolute Zeit (Newton: "tempus absolutum"), die für alle Beobachter gleich vergeht. Diese Annahme ist nicht mehr richtig, wenn die Geschwindigkeiten nahe an die Lichtgeschwindigkeit kommen. In der Relativitätstheorie vergeht für Beobachter mit verschiedenen Geschwindigkeiten die Zeit verschieden schnell.

Ebenso nimmt Newton an, dass der Raum unveränderlich ist und praktisch die Struktur hat, die durch die uns vertrauten kartesischen Koordinaten beschrieben wird: es gilt der Satz des Pythagoras für die Abstände zweier Punkte. Auch dies ist im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr gültig: sie nimmt einen gekrümmten Raum an, der sich auch zeitlich verändert.

4 Die Newtonschen Axiome der Dynamik

In der Dynamik treten zwei neue Begriffe auf: *Masse* und *Kraft* (engl. *force*). Die wichtigste neue Einsicht, die die moderne Mechanik ermöglichte, war: *eine Kraft ist nicht die Ursache einer Bewegung, sondern einer* Veränderung *der Bewegung.* In der vertrauten Umgebung braucht man eine Kraft, um die Geschwindigkeit eines Körpers gleich zu halten; das geht aber auf Reibungskräfte usw. zurück und ist nicht das Wesentliche!

4.1 Das erste Axiom

Das erste Newtonsche Axiom beschreibt deswegen auch den Fall eines Körpers, auf den keine Kraft wirkt:

Axiom 1: Trägheitsgesetz, schon von Galilei erkannt. *Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung , wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu verändern.*

Mit "gleichförmiger Bewegung" ist $\dot{\vec{v}} = 0$, d. h. $\vec{v} = \text{const.}$ gemeint.

Heute würde man es etwas schärfer formulieren: *Es gibt Koordinatensysteme, in denen...* (die Formulierung von Axiom 1 richtig ist). Solche Systeme heißen *Inertialsysteme.* Wenn man sich in einem anfahrenden Zug befindet, setzen sich Gegenstände scheinbar von selbst in Bewegung — diese Problematik wird uns später mehr beschäftigen.

4.2 Das zweite Axiom

Das zweite Axiom behandelt die Frage, wie die Änderung der Bewegung quantitativ gegeben ist. Das Problem ist, dass es zwei neue Größen enthält:

Die Kraft ist anschaulich gegeben: wenn jemand an einem Körper zieht oder ihn stößt, übt er eine Kraft aus, die auch eine bestimmte Richtung hat. Kräfte kann man vergleichen: Wenn sie entgegengesetzt angreifen und das Resultat Null ist, sind sie vom Betrag her gleich. Wir bezeichnen eine Kraft mit $\vec{F}$.

Die (träge) Masse beschreibt, wie ein bestimmter Körper auf eine Kraft reagiert. Die Erfahrung zeigt, dass dieselbe Kraft verschiedene Körper verschieden stark in Bewegung bringt; dieser Unterschied ist in der Masse des Körpers quantifiziert. Die Masse wird i. A. mit m bezeichnet.

Zum Unterschied zwischen träger und schwerer Masse kommen wir später.

Axiom 2: Für ein Punktteilchen der Masse m gilt $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, wobei $\vec{p}$ der Impuls ist (engl. *momentum*). Der Impuls ist als $\vec{p} = m\vec{v}$ definiert.

Wenn die Masse konstant ist, bedeutet das

$$\dot{\vec{p}} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \tag{14}$$

der grundlegenden *Bewegungsgleichung* der Mechanik. Wenn z. B. die Kraft als Funktion des Ortes gegeben ist, hat man die *Differentialgleichung*

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}(t)) \tag{15}$$

für die unbekannte Bahnkurve $\vec{r}(t)$ zu lösen.

Übrigens hat Newton das Axiom nie in dieser Form formuliert. Aus seiner Verwendung in den *Principia* geht aber hervor, dass er es mathematisch so gemeint hat.

4.3 Das dritte Axiom

Dieses Axiom klingt sehr speziell, hat aber große Konsequenzen und ist in der modernen Physik immer noch unbeschränkt gültig.

Axiom 3: Actio = Reactio: *wenn zwei Körper aufeinander Kräfte ausüben, so sind diese Kräfte vom Betrag her gleich und entgegengesetzt gerichtet.*

Wenn also Punktteilchen 1 auf Teilchen 2 die Kraft $\vec{F}_{12}$ ausübt und umgekehrt Teilchen 2 auf Teilchen 1 die Kraft $\vec{F}_{21}$, so gilt $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

4.4 Das vierte Axiom

Dieses Axiom wird erst in moderneren Büchern hervorgehoben; früher war die Wichtigkeit dieser Annahme nicht bewusst.

Axiom 4: Superpositionsprinzip Wirken auf ein Punktteilchen mehrere Kräfte $\vec{F}_i$, $i = 1, \ldots, N$, so ist die Bewegung durch die resultierende Kraft

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \tag{16}$$

bestimmt.

5 Basisgrößen

Die grundlegenden Dimensionen der Mechanik sind Zeit, Länge und Masse mit den Einheiten Sekunde, Meter und Kilogramm (im SI-System). Die Massen zweier Körper können durch den Vergleich der Beschleunigungen unter derselben Kraft verglichen werden, so dass man die Masse eines Körpers angeben kann, wenn eine Standardmasse ($1\,kg$) bekannt ist.

Die anderen Größen haben Dimensionen, die aus den Gleichungen folgen: Geschwindigkeit m/s, Beschleunigung m/s^2 und Kraft $kg\,m/s^2$. Es sind also *abgeleitete Größen*.

6 Typische Kräfte

Die Kräfte in der Alltagsumgebung sind meist sehr kompliziert: die Kraft wird durch winzige Verformungen der Materiestruktur erzeugt. Fruchtbarer sind *Kraftfelder* wie Gravitation, elektromagnetische Felder und die Kräfte zwischen Elementarteilchen (schwache und starke Wechselwirkung).

Im Allgemeinen kann die Kraft in einem Kraftfeld von Ort, Geschwindigkeit und Zeit abhängen:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \tag{17}$$

Ein typisches Beispiel ist

- Die Gravitationskraft. In der Nähe der Erdoberfläche ist sie konstant und nach unten gerichtet:

  $$\vec{F} = m\vec{g} = -m_s g \vec{e}_z, \tag{18}$$

  wenn die z-Achse senkrecht nach oben zeigt. Darin ist m_s die *schwere Masse*, die angibt, wie stark ein Körper von der Gravitation angezogen wird.

  Bei größeren Entfernungen muss man das allgemeine Gravitationsgesetz verwenden für die Kraft zwischen zwei Massen m_{s1} in $\vec{r}_1$ und m_{s2} in $\vec{r}_2$:

  $$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_{s1} m_{s2}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\vec{F}_{21}. \tag{19}$$

Dabei ist die Kraft immer anziehend: die Kraft auf Teilchen 1, $\vec{F}_{21}$, ist auf Teilchen 2 hin gerichtet.

In (19) ist die Kraft in zwei Faktoren aufgespalten: ihr Betrag mal einen Einheitsvektor, der die Richtung angibt. Die Kraft fällt also mit $1/(\text{Abstand})^2$ ab.

Es ist eines der großen Mysterien der Natur, dass — nach den besten bis heute vorliegenden Messungen — träge und schwere Masse identisch sind. Wir werden also den Index s in Zukunft weglassen; man sollte sich aber immer daran erinnern, dass die beiden Massen im Prinzip nichts miteinander zu tun haben müssen.

Die Gravitationskraft wirkt als ein Beschleunigungsfeld (alle Körper fallen gleich schnell). Einstein hat diese Tatsache zur Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie gemacht, in der die Gravitation durch die Krümmung der Raumzeit erklärt wird.