4. Vorlesung Wintersemester

1 Typische Kräfte

Neben der Gravitationskraft sind weitere Beispiele

- Die Harmonische Kraft (Hooke'sches Gesetz). Für eine gespannte Feder ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung. In einer Dimension also

  $$F = -k(x - x_0) \tag{1}$$

  mit der *Federkonstanten* k. In drei Dimensionen sieht das so aus:

  $$\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0). \tag{2}$$

  Dieses Gesetz gilt in der Praxis immer nur für "kleine" Auslenkungen: wenn man zu weit von der Ruhelage weggeht, ändern sich die Verhältnisse (z. B. wird die Feder zerreißen). Andererseits spielt dieses Gesetz in der Physik eine ungeheuer wichtige Rolle, weil man bei einem System, das ein wenig aus einer Gleichgewichtslage abgelenkt wird, praktisch immer, bei sehr kleinen Auslenkungen, eine solche lineare rücktreibende Kraft hat: das entspricht dem niedrigsten Term in einer Reihenentwicklung.

- Reibungskräfte. Diese sind die einfachsten Kräfte, die von der Geschwindigkeit abhängen. Man unterscheidet *Stokes'sche Reibung*, $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, die also linear mit der Geschwindigkeit geht (z.B. langsame Bewegung in Flüssigkeiten), und *Newtonsche Reibung*, die quadratisch geht, $\vec{F} = -\beta|\vec{v}|\vec{v}$ (z.B. schnelle Bewegung in Luft). In der Natur gibt es natürlich auch wesentlich komplizierteres Verhalten.

  In beiden Fällen muss die Kraft entgegengesetzt zur Geschwindigkeit sein, da sie ja abbremst.

2 Lösung der Bewegungsgleichungen

Dass die Bewegungsgleichung der Newtonschen Mechanik die Form einer Differentialgleichung hat, ist nicht überraschend. Die meisten Grundgleichungen der Physik beschreiben die Änderung von physikalischen Größen, d. h. wie ihre Zeitableitungen bestimmt werden.

Differentialgleichungen zu lösen, ist i. A. sehr schwierig und es gibt nur in einfachen Fällen fertige Rezepte, was aber zum Glück für die meisten Beispiele in diesen Vorlesungen zutrifft. In komplizierteren Fällen bleibt nur die numerische Lösung, wozu es heute ausgeklügelte Verfahren gibt. Hier werden zunächst einige besonders einfache Fälle behandelt, um zu demonstrieren, wie das Lösen einer DGL funktioniert. Zur Einübung wird am Anfang sehr ausführlich und dann immer kürzer gerechnet.

2.1 Einfachster Fall: Kraft verschwindet

In diesem Fall ist die Bewegungsgleichung einfach

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \vec{0}. \tag{3}$$

Das entspricht eigentlich jeweils drei Gleichungen für die drei Komponenten, aber bei der Integration wird jede der Komponenten gleich behandelt, so dass man das Ergebnis auch gleich wieder als Vektor schreiben kann: aus

$$\dot{v}_x = 0, \quad \dot{v}_y = 0, \quad \dot{v}_z = 0 \tag{4}$$

folgt

$$v_x = \text{const}, \quad v_y = \text{const}, \quad v_z = \text{const} \tag{5}$$

oder vektoriell $\vec{v} = \overrightarrow{\text{const}}$.

Was ist für die Konstante einzusetzen? Hier kommt die Idee der Anfangsbedingungen ins Spiel: zu Anfang der Bewegung muss die Geschwindigkeit vorgegeben sein, etwa als $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$. Damit ist das Resultat der ersten Integration

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0. \tag{6}$$

Für die zweite Integration haben wir zu lösen $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_0$. Dazu integrieren wir auf beiden Seiten von der Anfangszeit t_0 bis zur Endzeit t, wobei wieder t' als Integrationsvariable verwendet werden muss:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 \mathrm{d}t' = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \vec{r}(t')\, \mathrm{d}t'. \tag{7}$$

Das ergibt durch Auswerten der beiden Integrale (die Rechnung läuft wieder in allen Komponenten gleich)

$$\vec{v}_0(t - t_0) = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0). \tag{8}$$

Für den Anfangswert $\vec{r}(t_0)$ schreiben wir wieder kürzer $\vec{r}_0$ und erhalten so die Lösung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) \tag{9}$$

für die gleichförmige Bewegung.

Diese Rechnung hat gezeigt, dass für die Newtonsche Bewegungsgleichung mit ihrer zweiten Zeitableitung durch die zwei Integrationen zwei Anfangswerte benötigt werden: Anfangsposition und -geschwindigkeit. Im Allgemeinen fordert eine DGL n-ter Ordnung, also mit n-ter Ableitung, n Anfangsbedingungen.

2.2 Konstante Kraft

Im Falle einer völlig konstanten Kraft $\vec{F}$ kann man wieder sehr einfach integrieren. Aus

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} \tag{10}$$

folgt zunächst

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0), \tag{11}$$

und bei der zweiten Integration hat man auszuwerten

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) - \vec{r}_0 &= \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0) \right] \mathrm{d}t \\ &= \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2, \end{aligned} \tag{12}$$

oder

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2. \tag{13}$$

Das ist die *gleichförmig beschleunigte Bewegung.*

Man beachte, dass die verschiedenen Komponenten in diesem Fall nichts miteinander zu tun haben. Wenn z. B. die Kraft die Schwerkraft in $-x$-Richtung ist, $\vec{F} = (-mg, 0, 0)$, so ist die Lösung als Vektor geschrieben

$$\vec{r}(t) = \left(x_0 + v_{x0}(t - t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2,\, y_0 + v_{y0}(t - t_0),\, z_0 + v_{z0}(t - t_0) \right). \qquad (14)$$

Diese Formel enthält die aus der Schule bekannte Lösung für den freien Fall, den schrägen Wurf, usw.

2.3 Zeitabhängige Kraft

Ein Fall, der sich ebenfalls noch leicht lösen lässt, ist eine allgemein nur von der Zeit abhängige Kraft $\vec{F}(t)$. Die Integration führt in diesem Fall zu

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}(t')}{m}\, \mathrm{d}t' \qquad (15)$$

und weiter zu

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t'} \frac{\vec{F}(t'')}{m}\, \mathrm{d}t'' \right] \mathrm{d}t'. \qquad (16)$$

Das ist natürlich nur eine formale Lösung. Ob das nützlich ist, hängt davon ab, ob man die Integrale wirklich ausführen kann. Sonst bleibt nur die Numerik.

Leider ist dieser durch Integrale lösbare Fall selten. Meist hängt die Kraft eher vom Ort ab, und damit hat man das Problem, das auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung die unbekannte Funktion, deren Ableitung links steht, selbst wieder auftaucht.

3 Bewegung mit Stokes'scher Reibung

Die Bewegungsgleichung mit Stokes'scher Reibung in einer Dimension lautet

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x}. \qquad (17)$$

Eigentlich ist das zu kompliziert, denn man erhält eine DGL niedrigerer Ordnung, wenn man die Geschwindigkeit als unbekannte Funktion wählt:

$$m\dot{v} = -\alpha v. \qquad (18)$$

Das ist jetzt eine richtige DGL, insofern als die unbekannte Funktion in verschiedenen Ableitungsstufen auftritt und direkte Integration zu nichts führt. Die Lösung von DGLs ist im allgemeinen Fall nicht leicht zu finden, wenn sie überhaupt in analytischer Form möglich ist; das ist ähnlich wie bei den Integralen. Nur für einige besondere Klassen von DGLs kann man Verfahren angeben. Für unseren Fall gibt es mehrere Möglichkeiten zur Lösung:

3.1 Benutzung der Umkehrfunktion

Statt $v(t)$ lösen wir für $t(v)$. Mit Hilfe der allgemeinen Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{\mathrm{d}v/\mathrm{d}t} \qquad (19)$$

erhalten wir aus (18)

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = -\frac{m}{\alpha v}. \qquad (20)$$

Das lässt sich jetzt einfach über v integrieren:

$$t - t_0 = -\frac{m}{\alpha}(\ln v - \ln v_0) = -\frac{m}{\alpha}\ln\frac{v}{v_0}, \tag{21}$$

was nach v aufgelöst werden kann,

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}(t - t_0)\right). \tag{22}$$

Die Geschwindigkeit des Teilchens nähert sich also exponentiell der Null.

3.2 Exponentialansatz

Die Gleichung (18) sagt aus, dass die Ableitung der Funktion $v(t)$ proportional zu $v(t)$ selbst sein muss. Die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft ist aber die Exponentialfunktion. Mit dem Ansatz $v(t) = a\exp(bt)$ in (18) erhält man

$$mab\exp(bt) = -\alpha a\exp(bt), \tag{23}$$

was man durch $a\exp(bt)$ dividieren darf, um $mb = -\alpha$ zu erhalten. Somit wird der Lösungsansatz zu

$$v(t) = a\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right). \tag{24}$$

Den Faktor a bestimmt man dann aus der Anfangsbedingung:

$$v_0 = a\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t_0\right) \quad\longrightarrow\quad a = v_0\exp\left(+\frac{\alpha}{m}t_0\right). \tag{25}$$

Diese Methode der Lösung mit einer “geratenen” Funktion erscheint etwas weit hergeholt, ist aber sehr produktiv, weil sich, wie wir sehen werden, eine große und häufig vorkommende Klasse von DGLs mit diesem Ansatz lösen lässt.

Mit der Lösung für $v(t)$ kann man durch Integration dann auch die für $x(t)$ gewinnen, was aber etwas umständlichere Umformungen erfordert. Das Resultat ist

$$x(t) = x_0 + \frac{mv_0}{\alpha}\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}(t - t_0)\right)\right]. \tag{26}$$

Das Teilchen nähert sich also exponentiell der Endposition

$$x(t \to \infty) = x_0 + \frac{mv_0}{\alpha}. \tag{27}$$