

## 5. Vorlesung Wintersemester

### 1 Bewegung mit Stokes'scher Reibung

Ein dritter Weg, die Bewegungsgleichung bei Stokes'scher Reibung

$$m\dot{v} = -\alpha v \quad (1)$$

zu lösen, ist die

#### 1.1 Separation der Variablen

Diese Methode ist etwas allgemeiner und funktioniert für eine ganze Reihe von DGLs. Wenn die DGL die Form

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y) \quad (2)$$

hat, also in ein Produkt aus Funktionen der abhängigen und unabhängigen Variablen zerfällt, kann man die beiden Teile *separieren*:

$$\frac{dy}{G(y)} = F(x) dx \quad (3)$$

und dann integrieren

$$\int_{y_0}^y \frac{dy'}{G(y')} = \int_{x_0}^x F(x') dx'. \quad (4)$$

In unserem Falle der Gleichung (1) ergibt das

$$m \frac{dv}{v} = -\alpha dt. \quad (5)$$

Integrieren führt sofort wieder auf

$$m \ln \frac{v}{v_0} = -\alpha(t - t_0). \quad (6)$$

und damit zur bereits bekannten Lösung.

Diese Methode und die der Umkehrfunktion zeigen die Vorteile der Leibnizschen Notation für Differentiale und Ableitungen eindrucksvoll. Man sollte sich vor allem daran gewöhnen, mit einzelnen Differentialen umzugehen, die nicht in einer Ableitung stehen.

### 2 Mehr zu Differentialgleichungen

Betrachten wir eine DGL für die Funktion  $x(t)$  und bezeichnen die  $n$ -te Ableitung  $d^n x/dt^n$  mit  $x^{(n)}(t)$ . Eine Gleichung der Form

$$f(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) = 0, \quad (7)$$

mit  $n$  der höchsten vorkommenden Ableitung, ist eine DGL  $n$ -ter Ordnung.  
Die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= F_x(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t) \\ \ddot{y} &= F_y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t) \\ \ddot{z} &= F_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t)\end{aligned}\tag{8}$$

ist ein System aus drei gekoppelten DGLs zweiter Ordnung. Wir betrachten aber vorerst nur den Fall einer Funktion wie in (7).

Wir hatten schon gesehen, dass man für eine DGL zweiter Ordnung zwei Anfangsbedingungen angeben muss, um die Lösung eindeutig zu bestimmen. Das kann aber auch durch andere Bedingungen geschehen, z. B. kann man den Anfangs- und den Endwert von  $x$  angeben — ein sogenanntes *Randwertproblem*. Im Allgemeinen gilt

*Die allgemeine Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung ist eine Lösungsschar*

$$x(t) = x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n)\tag{9}$$

mit  $n$  unabhängig voneinander wählbaren Parametern. Für einen Satz spezieller Werte der  $\gamma$  erhält man eine spezielle (partikuläre) Lösung.

Umgekehrt kann man aber auch aussagen, dass damit *alle* Lösungen gewonnen sind: Hängt die Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung von  $n$  unabhängigen Parametern ab, so ist es die allgemeine Lösung. D. h. jede beliebige Lösung lässt sich dann so schreiben.

### 3 Lineare Differentialgleichungen

Ein sehr wichtiger Spezialfall ist dann gegeben, wenn die Funktion  $x(t)$  und ihre Ableitungen nur linear in die DGL eingehen: eine DGL der Form

$$\alpha_n x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{x}(t) + \alpha_0 x(t) = \beta(t)\tag{10}$$

ist eine *lineare Differentialgleichung*. Wenn  $\beta(t) = 0$  ist, ist sie *homogen*, ansonsten *inhomogen* mit der Inhomogenität  $\beta(t)$ .

#### 3.1 Homogene lineare Differentialgleichungen

Für homogene lineare Differentialgleichungen gilt das Superpositionsprinzip: wenn  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen der DGL sind, ist es auch  $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ . Man kann also versuchen, die allgemeine Lösung als Summe über  $n$  spezielle Lösungen darzustellen,

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_k(t)\tag{11}$$

wobei dann die  $c_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  die  $n$  Parameter der Lösung darstellen.

Das führt aber auf ein Problem: wenn unter den  $x_k$  dieselbe Lösung zweimal vorkommt, z. B. sei  $x_1(t) = x_2(t)$ , dann hängt die Lösung nur von  $c_1 + c_2$  ab, es fehlt dann also ein unabhängiger Parameter. Kurzes Nachdenken zeigt, dass dasselbe gilt, wenn eine der Lösungen sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt. Das führt zur Forderung, dass die speziellen Lösungen *linear unabhängig sein müssen*.

**Definition:**  $n$  Funktionen  $x_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$  sind *linear unabhängig*, wenn aus

$$\sum_{k=1}^n c_k x_k(t) = 0 \text{ für alle } t\tag{12}$$

folgt, dass alle  $c_k$  verschwinden müssen.

Jede homogene lineare DGL hat  $n$  linear unabhängige Lösungen,  $x_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , und die allgemeine Lösung lässt sich als Linearkombination dieser schreiben:

$$x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{k=1}^n c_k x_k(t). \quad (13)$$

Dabei lassen sich die  $c_k$  irgendwie aus den  $\gamma_k$  bestimmen.

Wenn es die Zerlegung (13) nicht gäbe, wäre die Funktion auf der linken Seite von den  $x_k(t)$  linear unabhängig: es gäbe also eine linear unabhängige Lösung mehr und damit mehr als  $n$  frei wählbare Parameter, was nicht sein kann.

Wie erkennt man lineare Unabhängigkeit? Der Beweis ist meist trivial, da ja die Beziehung (12) an jedem Punkt  $t$  gelten muss und man sich nur geschickt ein paar Werte aussuchen muss. Um z. B. nachzuweisen, dass der Sinus und der Kosinus linear unabhängig sind, betrachte man

$$a \sin t + b \cos t = 0 \text{ für alle } t. \quad (14)$$

An der Stelle  $t = 0$  folgt daraus  $b = 0$ , an der Stelle  $t = \pi/2$  andererseits  $a = 0$  — damit ist die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen.

### Beispiel (Stokes'sche Reibung):

Die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = 0 \quad (15)$$

hat, wie in der letzten Vorlesung gesehen, die Form

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad (16)$$

Da es sich nur um zwei Funktionen handelt und die Einzellösungen  $x_1(t) = 1$  und  $x_2(t) = e^{-\frac{\alpha}{m}t}$  keine Vielfachen voneinander sind, sind sie linear unabhängig.

## 3.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Wenn eine Inhomogenität hinzukommt, gilt das Superpositionsprinzip nicht mehr. Mit der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung hat man aber sofort auch eine Methode für die inhomogene DGL

$$\alpha_n x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{x}(t) + \alpha_0 x(t) = \beta(t). \quad (17)$$

Man konstruiert die allgemeine Lösung von (17) aus den  $x_k(t)$  der homogenen DGL und addiert eine spezielle  $\bar{x}(t)$  der inhomogenen dazu:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_k(t) + \bar{x}(t). \quad (18)$$

Das funktioniert, weil bei Einsetzen in die DGL die ersten Terme alle Null liefern, die spezielle Lösung  $\bar{x}(t)$  jedoch das geforderte  $\beta(t)$  liefert.

### Beispiel (Stokes'sche Reibung in homogenem Kraftfeld):

Für die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = F = \text{const.} \quad (19)$$

erraten wir schnell die spezielle Lösung  $\bar{x}(t) = \frac{F}{\alpha}t$ . Kombinieren wir dies mit der bereits bekannten allgemeinen Lösung (16) für die homogene DGL, erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$x(t) = \frac{F}{\alpha}t + c_1 + c_2 e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad (20)$$

## 4 Der harmonische Oszillator

Der harmonische Oszillator ist eines der wichtigsten Themen der Physik, weil kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage praktisch immer durch eine solche Näherung beschrieben werden können. Deswegen werden Sie ihm im Verlauf Ihres Physikstudiums immer wieder begegnen.

Gekennzeichnet ist er durch eine rücktreibende Kraft, die durch das Hooke'sche Gesetz beschrieben wird, hinzukommen können aber noch eine Reibungskraft nach Stokes und eine äußere antreibende Kraft. Damit haben wir drei Varianten des harmonischen Oszillators zu studieren:

1. der ungedämpfte Oszillator mit der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (21)$$

eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten,

2. der gedämpfte Oszillator

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (22)$$

ebenfalls linear und homogen mit konstanten Koeffizienten, sowie

3. der gedämpfte Oszillator mit äußerer Anregungskraft  $F(t)$

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (23)$$

Das ist eine inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

Dabei wurden die Terme in  $x$  und seinen Ableitungen auf einer Seite zusammengefasst, wie es für DGLs üblich ist und auch für die späteren Rechnungen nützlich sein wird.

Der Exponentialansatz  $x(t) = e^{at}$  führt für den ungedämpften Oszillator auf

$$ma^2 + k = 0 \text{ oder } a^2 = -\frac{k}{m}. \quad (24)$$

Da sowohl  $k$  als auch  $m$  positiv sind, ist hier schon die Quadratwurzel einer negativen Zahl zu ziehen, man braucht also komplexe Zahlen. Bevor wir sie betrachten, können wir aber die Lösung speziell für den ungedämpften Oszillator noch kurz durch Raten konstruieren. Funktionen, die sich bei zweimal Differenzieren mit einer negativen Zahl multiplizieren, sind nämlich Sinus und Kosinus (es wird sich zeigen, dass sie im komplexen Bereich eng mit der Exponentialfunktion zusammenhängen). Es gilt ja

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \omega t = -\omega^2 \sin \omega t, \quad \frac{d^2}{dt^2} \cos \omega t = -\omega^2 \cos \omega t. \quad (25)$$

Mit diesem Ansatz erhalten wir sofort

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (26)$$

und daraus folgt die berühmte Formel für die Kreisfrequenz des Oszillators

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (27)$$

Da Sinus und Kosinus linear unabhängig sind, haben wir damit auch schon die allgemeine Lösung des ungedämpften harmonischen Oszillators

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (28)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Wenn die Anfangszeit einfach als Null gewählt wird (das kann man immer durch passende Definition der Zeitkoordinate erreichen), hat man einfach

$$x_0 = x(0) = B, \quad v_0 = \dot{x}(0) = \omega A, \quad (29)$$

also ist dann die Lösung

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t. \quad (30)$$

Eine andere Möglichkeit, die allgemeine Lösung zu schreiben, ist diejenige mit Amplitude und Phasenverschiebung, üblicherweise in der Form

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi). \quad (31)$$

Das enthält dieselben Lösungen wie oben, weil nach dem Additionstheorem für den Kosinus

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (32)$$

diese Lösung geschrieben werden kann als

$$x(t) = C \cos \phi \cos \omega t - C \sin \phi \sin \omega t, \quad (33)$$

was mit (28) übereinstimmt, wenn man

$$A = -C \sin \phi, \quad B = C \cos \phi \quad (34)$$

setzt. Die beiden unabhängigen Parameter sind jetzt  $C$  und  $\phi$ .

Diese Lösung ist also relativ leicht gewonnen; leider geht dieser Lösungsweg nicht mehr, wenn man Reibung mit einbezieht: dann hat man wegen der ersten Ableitung immer eine andere trigonometrische Funktion in der Gleichung und sie kann nicht zu einer algebraischen Gleichung reduziert werden.