6. Vorlesung Wintersemester

1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Hier soll nur eine kurze Zusammenfassung gegeben werden. Komplexe Zahlen entstehen durch Vervollständigung der reellen Zahlen, um beliebige algebraische Gleichungen lösen zu können. Dazu braucht man nur die Einheit der *imaginären Zahlen* $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, und den Willen, die üblichen Rechenregeln auf komplexe Zahlen zu übertragen.

1.1 Imaginäre Zahlen

Potenzen von i: wegen $\mathrm{i}^2 = -1$ rechnet man weiter $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = +1$. Für die höheren Potenzen wiederholen sich dann diese Werte immer wieder.

Imaginäre Zahlen sind Vielfache von i. Z. B. 2i mit dem Quadrat $(2\mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i}^2 = -4$.

1.2 Bildung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen entstehen durch Addition einer reellen und einer imaginären Zahl, ihrem *Realteil* und *Imaginärteil*

$$z = x + \mathrm{i}y. \tag{1}$$

Die komplex konjugierte Zahl zu z hat den Imaginärteil mit umgedrehtem Vorzeichen

$$z^* = x - \mathrm{i}y. \tag{2}$$

Manche Bücher benutzen auch die Schreibweise $\bar{z}$ für z^*.

1.3 Einfache Rechenregeln

Die Regeln der Arithmetik überträgt man, wobei nur $\mathrm{i}^2 = -1$ zusätzlich benötigt wird. So funktioniert

- Addition:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2). \tag{3}$$

- Subtraktion:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2). \tag{4}$$

- Multiplikation wird durch Ausmultiplizieren der Klammern berechnet:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= x_1 x_2 + \mathrm{i}^2 y_1 y_2 + \mathrm{i}x_1 y_2 + \mathrm{i}x_2 y_1 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \tag{5}$$

- Die “Länge” oder den Betrag der komplexen Zahl erhält man durch die Formel
$$|z|^2 = zz^* = x^2 + y^2. \tag{6}$$

Man sieht, dass sich komplexe Zahlen bzgl. Addition und Subtraktion wie Vektoren im zweidimensionalen Raum verhalten. Die Multiplikation mit einer reellen Zahl entspricht in diesem Bild der Streckung des Vektors durch Multiplikation mit einem Skalar. Das Multiplikationsgesetz für komplexe Zahlen ist aber etwas völlig Eigenständiges.

- Division: diese ist etwas komplizierter, aber ein Trick hilft: man macht den Nenner reell durch Erweitern mit der komplex konjugierten Zahl:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{7}$$

1.4 Polarkoordinaten

In Polarkoordinaten (r, ϕ) werden die komplexen Zahlen ebenfalls genau wie zweidimensionale Vektoren dargestellt:
$$z = r\cos\phi + \mathrm{i}r\sin\phi, \text{ also } x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi. \tag{8}$$
Es ist dann
$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{9}$$
und wir werden nach einem kurzen Einschub sehen, dass Multiplikation und Division von komplexen Zahlen in Polarkoordinaten wesentlich einfacher aussehen.

1.5 Die komplexe Exponentialfunktion

Wohl die wichtigste Formel für komplexe Zahlen ist die *Eulersche Formel*, die Real- und Imaginärteil von e^z betrifft. Um sie abzuleiten, braucht man die Reihenentwicklung, die im Reellen so aussieht:
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{10}$$
Setzen wir hierin zunächst eine imaginäre Zahl $\mathrm{i}\phi$ ein (ϕ reell) und nehmen wieder an, dass wir einfach so rechnen dürfen wie gewöhnt:
$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\phi} &= 1 + \frac{\mathrm{i}\phi}{1!} + \frac{(\mathrm{i}\phi)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\phi)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\phi)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\phi)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{i}\phi)^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{\mathrm{i}\phi}{1!} + \frac{\mathrm{i}^2\phi^2}{2!} + \frac{\mathrm{i}^3\phi^3}{3!} + \frac{\mathrm{i}^4\phi^4}{4!} + \frac{\mathrm{i}^5\phi^5}{5!} + \frac{\mathrm{i}^6\phi^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{\mathrm{i}\phi}{1!} - \frac{\phi^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{\mathrm{i}\phi^5}{5!} - \frac{\phi^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \cdots\right) \\ &\quad + \mathrm{i}\left(\frac{\phi}{1!} - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned} \tag{11}$$
das Bildungsgesetz von Real- und Imaginärteil ist klar. In den beiden Reihenentwicklungen in Klammern erkennt man die des Kosinus und des Sinus
$$\begin{aligned} \cos\phi &= 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \cdots \\ \sin\phi &= \frac{\phi}{1!} - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \cdots \end{aligned} \tag{12}$$

Das Resultat ist die berühmte *Eulersche Formel*

$$e^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\,\sin\phi. \tag{13}$$

Jetzt ist klar, warum die Exponentialfunktion auch für oszillierende Lösungen stehen kann! Sie ist periodisch:

$$e^{\mathrm{i}\phi} = e^{\mathrm{i}(\phi+2\pi)}, \tag{14}$$

und außerdem hat diese Funktion noch die Eigenschaft

$$|e^{\mathrm{i}\phi}| = 1 \quad \text{für beliebige } \phi. \tag{15}$$

Zur Ergänzung noch: wenn im Exponenten eine komplexe Zahl steht, benutzt man wieder die Rechenregeln

$$e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x e^{\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y). \tag{16}$$

1.6 Polardarstellung von komplexen Zahlen

Die Darstellung in Polarkoordinaten kann mit Hilfe der Eulerschen Gleichung umgeschrieben werden in der Form

$$z = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) = re^{\mathrm{i}\phi}, \tag{17}$$

wobei

$$r = |z| \tag{18}$$

ist. Für die komplex konjugierte Zahl ist

$$z^* = r(\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi) = re^{-\mathrm{i}\phi}. \tag{19}$$

Die Polardarstellung kann man aus der kartesischen wie folgt berechnen:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \phi = \arctan(y/x). \tag{20}$$

Man beachte aber, dass ϕ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist.

Mit der Exponentialfunktion darf man wieder genauso rechnen wie mit der reellen Variante. Zum Beispiel bei der Multiplikation

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{\mathrm{i}\phi_1}|z_2|e^{\mathrm{i}\phi_2} = |z_1||z_2|e^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}, \tag{21}$$

und bei der Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{\mathrm{i}\phi_1}}{|z_2|e^{\mathrm{i}\phi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2)}. \tag{22}$$

Man sieht also, dass diese Operationen in Polarkoordinaten wesentlich einfacher sind. Dasselbe gilt für das Potenzieren

$$z^n = r^n e^{\mathrm{i}n\phi} \tag{23}$$

und das Wurzelziehen

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\exp\left(\mathrm{i}\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right), \qquad k = 0\ldots n-1. \tag{24}$$

Man merke sich die Spezialfälle

$$e^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}, \qquad e^{\mathrm{i}\pi} = -1, \qquad e^{3\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}. \tag{25}$$

Damit ist das einfache Beispiel

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1e^{\mathrm{i}\pi}} = \sqrt{1}e^{\mathrm{i}\pi/2+\mathrm{i}k\pi} = \pm\mathrm{i} \tag{26}$$

wieder nachzuvollziehen, wobei $k = 0$ oder 1 ist.

2 Der ungedämpfte Oszillator mit komplexem Lösungsansatz

Die DGL des ungedämpften Oszillators

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{27}$$

ist eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten. Wie schon einmal aufgeschrieben, führt der Ansatz

$$x(t) = e^{\alpha t} \tag{28}$$

auf die Bedingung

$$\alpha^2 = -\frac{k}{m} = -\omega^2, \tag{29}$$

für die wir aber jetzt die Lösung angeben können:

$$\alpha_1 = \mathrm{i}\omega, \qquad \alpha_2 = -\mathrm{i}\omega. \tag{30}$$

Die beiden Lösungen werden also

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\mathrm{i}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t \\ x_2(t) &= e^{-\mathrm{i}\omega t} = \cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t. \end{aligned} \tag{31}$$

Das sind beides komplexe Funktionen! Die physikalische Lösung muss aber eine reelle Funktion sein, d. h. es muss gelten

$$x(t) = x^*(t). \tag{32}$$

Wenn man $x(t)$ als Kombination der beiden Lösungen schreibt, wird daraus

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) \\ &= x^*(t) = A_1^* x_1^*(t) + A_2^* x_2^*(t) \\ &= A_1^* x_2(t) + A_2^* x_1(t), \end{aligned} \tag{33}$$

woraus für die Koeffizienten folgt

$$A_1^* = A_2, \text{ damit automatisch auch } A_2^* = A_1. \tag{34}$$

Wie es sein muss, sind also nicht beide komplexe Konstanten frei wählbar (dann könnte man ja in Real- und Imaginärteil jeweils zwei Anfangsbedingungen erfüllen).