7. Vorlesung Wintersemester

1 Der ungedämpfte Oszillator mit komplexem Lösungsansatz

Wie gezeigt, wird die DGL des ungedämpften Oszillators

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{1}$$

im Komplexen von den Funktionen $x_1(t) = e^{i\omega t}$ und $x_2(t) = e^{-i\omega t}$ gelöst. Die allgemeine komplexe Lösung der DGL war somit

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \tag{2}$$

Damit sie für alle Zeiten reell wird, muss gelten

$$A_1^* = A_2, \text{ oder äquivalent } A_2^* = A_1. \tag{3}$$

Drücken wir die Lösung jetzt in reeller Form aus! Man ersetzt die Koeffizienten durch reelle in der Form

$$A_1 = a - \mathrm{i}b, \qquad A_2 = a + \mathrm{i}b. \tag{4}$$

Damit wird die allgemeine Lösung zu

$$\begin{aligned} x(t) &= (a - \mathrm{i}b)(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + (a + \mathrm{i}b)(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t) \\ &= 2a\cos\omega t + 2b\sin\omega t, \end{aligned} \tag{5}$$

also bis auf den unwichtigen Faktor 2 die bekannte reelle Lösung.

Das Ganze sieht wesentlich komplizierter aus, als es das Erraten der reellen Lösung war, wir werden aber sehen, dass diese Methode sehr mächtig ist und sich schon beim gedämpften Oszillator bewährt.

Bemerkung: Da die messbaren Größen immer reell sind, spielen die komplexen Zahlen immer die Rolle von Rechenhilfsmitteln. Es gibt dann zwei Möglichkeiten, aus der komplexen Lösung $z(t)$ auf eine reelle zu kommen

1. man konstruiert eine reelle Lösung durch geeignete Wahl der Koeffizienten, wie es soeben gemacht wurde, oder
2. man nimmt den Realteil der komplexen Lösung.

Beide Möglichkeiten haben ihre Anwendungen; bei der zweiten ist darauf zu achten, zunächst allgemeine $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ zu wählen, bevor man den Realteil nimmt.

2 Exponentialansatz für lineare DGLs

Im Fall, dass in der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\alpha_n x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1\dot{x}(t) + \alpha_0 x(t) = 0 \tag{6}$$

die Koeffizienten α_i Konstanten sind, kann man einen Exponentialansatz für die Lösung machen.

Setzen wir in (6) den Ansatz $x(t) = Ae^{at}$ ein, bringt jede Ableitung einfach den Faktor a vor die Funktion, so dass man sofort

$$\alpha_n a^n Ae^{at} + \alpha_{n-1}a^{n-1}Ae^{at} + \cdots + \alpha_1 aAe^{at} + \alpha_0 Ae^{at} = 0 \tag{7}$$

erhält. Kürzer als Summe geschrieben und mit Ausklammern des gleichbleibenden Faktors:

$$Ae^{at}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k = 0. \tag{8}$$

Der Vorfaktor kann weggekürzt werden, da die Exponentialfunktion nie Null wird. Dass der Vorfaktor A aus der Rechnung fällt, also beliebig wählbar ist, überrascht nicht, weil ja auch beliebige Vielfache einer Funktion die DGL erfüllen und somit dieser Faktor unbestimmt bleiben muss.

Die Lösung der homogenen DGL ist damit auf die Lösung der algebraischen Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k = 0 \tag{9}$$

zurückgeführt, die die möglichen Faktoren im Exponenten bestimmt. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra von C. F. Gauß hat eine solche Gleichung genau n Lösungen, die allerdings folgende Probleme bringen können, die schon von den quadratischen Gleichungen vertraut sind:

- die Lösungen können komplex sein, und
- eine Lösung kann mehrfach auftreten.

Dass zwei Lösungen mit verschiedenen Faktoren im Exponenten linear unabhängig sind, zeigt man wieder leicht durch Auswertung an zwei verschiedenen Stellen.

3 Der gedämpfte Oszillator

Für diesen Fall schreiben wir die Bewegungsgleichung etwas um:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{10}$$

Warum die Änderungen gegenüber der früheren Version

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) + \alpha\dot{x}(t) = 0 \quad ? \tag{11}$$

Es ist zu erwarten, dass die Schwingungsfrequenz des ungedämpften Oszillators,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{12}$$

für den Fall mit Dämpfung ebenfalls eine Rolle spielen wird. Dass statt α als Reibungskoeffizient jetzt 2β steht, hat einfach den Zweck, die Formeln später einfacher werden zu lassen. Sie werden in Lehrbüchern oft feststellen, dass man solche speziellen Formulierungen wählt, die eine elegantere Form der Lösung erlauben: das setzt aber natürlich voraus, dass man die Lösung schon kennt!

Nun wird der Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ eingesetzt:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{13}$$

Dabei wurde schon die Exponentialfunktion selbst weggekürzt.

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung kann man mit der vertrauten *pq*-Formel erhalten:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{14}$$

Hier wird der Sinn des Faktors 2 in (10) klar.

Wie üblich hängt es vom Wert der Diskriminante ab, wie die Lösung aussieht. Drei Fälle sind zu unterscheiden:

1. $\beta > \omega_0$ (*starke Dämpfung*): die Diskriminante ist positiv und beide Wurzeln sind reell. Das bedeutet, dass die Lösungen reine Exponentialfunktionen sind.

2. $\beta = \omega_0$ (*kritische Dämpfung*): es gibt nur eine Wurzel; die Lösung ist aber wieder eine reine Exponentialfunktion. Hier wird es ein Problem, sich die zweite linear unabhängige Lösung zu beschaffen.

3. $\beta < \omega_0$ (*schwache Dämpfung*): die Wurzeln sind beide komplex, konjugiert zueinander, und die Lösungsfunktionen bestehen aus exponentiellen und periodischen Anteilen, weil die Exponentialfunktion einer komplexen Größe benutzt wird.

4 Die Lösungen für den gedämpften Oszillator

Sehen wir uns nun die drei Fälle im Detail an.

4.1 Der stark gedämpfte Oszillator

In diesem Fall gilt $\beta > \omega_0$ und die Wurzeln sind beide reell mit der Form

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \gamma, \qquad \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{15}$$

Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t}\right). \tag{16}$$

Beide Anteile klingen exponentiell ab. Die Anfangsbedingungen bei $t = 0$ lassen sich wegen

$$\dot{x}(t) = -(\beta - \gamma) C_1 e^{-(\beta-\gamma)t} - (\beta + \gamma) C_2 e^{-(\beta+\gamma)t} \tag{17}$$

auf die Form

$$x_0 = C_1 + C_2, \qquad v_0 = -(\beta - \gamma) C_1 - (\beta + \gamma) C_2 \tag{18}$$

bringen, woraus man durch Auflösen auf

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma}\right), \qquad C_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma}\right) \tag{19}$$

kommt.

Wie sieht die Lösungsfunktion aus? Der Wert von γ erfüllt $0 < \gamma \leq \beta$. Der zweite Beitrag aus der Klammer in (16) fällt auf jeden Fall wesentlich schneller ab als der erste, so dass für große Zeiten auf jeden Fall

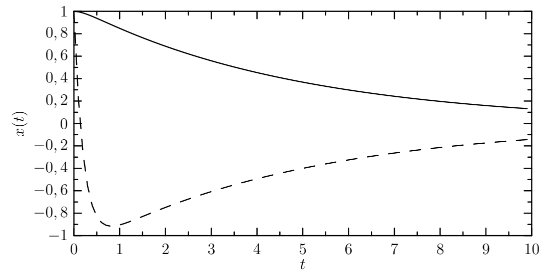
$$x(t \to \infty) \approx C_1 e^{-(\beta-\gamma)t} \tag{20}$$

gilt. Kann die Lösung durch Null gehen? Das gibt die Bedingung

$$C_1 e^{\gamma t} = -C_2 e^{-\gamma t} \text{ oder } \frac{C_1}{C_2} = -e^{-2\gamma t}. \tag{21}$$

Offensichtlich hat diese Gleichung für t höchstens eine Lösung.

Es ist nicht einfach, daraus abzuleiten, bei welchen Anfangsbedingungen ein Nulldurchgang passiert. Man würde aber vermuten, dass bei $x_0 > 0$ mit v_0 groß und negativ am ehesten so etwas passieren kann. Genau das zeigt auch das folgende Bild.



Lösungen für den Fall $\beta = 5/2$, $\omega_0 = 1$ mit Anfangsbedingungen $x_0 = 1$ und $v_0 = 0$ (durchgezogene Linie) sowie $v_0 = -10$ (gestrichelt).

4.2 Der schwach gedämpfte Oszillator

Für diesen Fall, in dem $\beta < \omega_0$ angenommen wird, sind beide Wurzeln komplex und wir können schreiben

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \mathrm{i}\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{22}$$

Es wurde also das Vorzeichen in der Wurzel umgedreht, indem der Faktor i herausgezogen wurde.

In diesem Fall ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= C_1 e^{-\beta t} e^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &= e^{-\beta t}\left(C_1 e^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 e^{-\mathrm{i}\omega t}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Das Ganze sieht also aus wie unsere vertraute ungedämpfte Lösung (in Klammern), multipliziert mit einem exponentiellen Abklingfaktor. *Allerdings ist die Frequenz ω des Schwingungsanteils nicht identisch mit der des ungedämpften Oszillators, sondern etwas kleiner.*

Um daraus die reelle Lösung zu machen, kann man wieder $C_1 = C_2^*$ setzen oder einfacher gleich für den Teil in Klammern die alternative Form mit trigonometrischen Funktionen verwenden:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A \sin \omega t + B \cos \omega t\right). \tag{24}$$

Für Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ erhält man wegen

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t) + e^{-\beta t}\left(\omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t\right) \tag{25}$$

die Bedingung

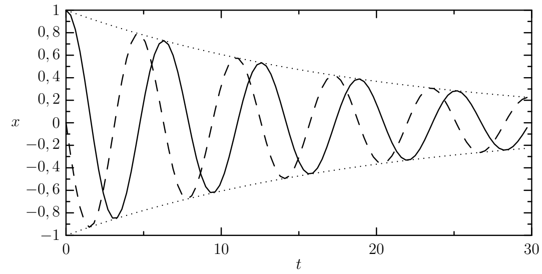
$$x_0 = x(0) = B, \qquad v_0 = \dot{x}(0) = -\beta x_0 + \omega A, \tag{26}$$

woraus

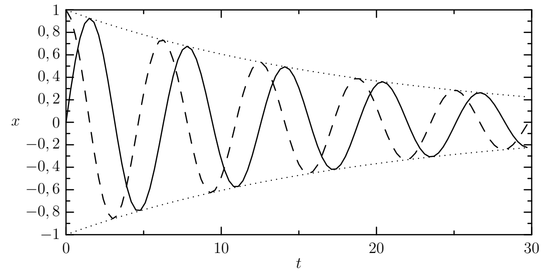
$$A = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega}, \qquad B = x_0 \tag{27}$$

folgt, also die Lösung

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \sin \omega t\right). \tag{28}$$



Der Fall $x_0 = 1$, $v_0 = 0$



Der Fall $x_0 = 0$, $v_0 = 1$

Das Bild zeigt zwei Lösungen für den Fall $\beta = 0.05$, $\omega_0 = 1$ mit der Anfangsbedingung $x_0 = 1$, $v_0 = 0$ (oben) bzw. $x_0 = 0$, $v_0 = 1$ (unten). In beiden Fällen ist $v(t)$ gestrichelt aufgetragen. Gleichzeitig zeigt das Bild die Funktion $\pm e^{-\beta t}$, um den exponentiellen Abfall zu verdeutlichen.

Die Lösungsfunktion ist natürlich nicht mehr periodisch, aber die Nullstellen, die ja durch die Nullstellen des Faktors gegeben sind, der wie bei der ungedämpften Schwingung aussieht, haben weiter den Abstand $T = 2\pi/\omega$.