8. Vorlesung Wintersemester

1 Der kritisch gedämpfte Oszillator

Der Fall $\beta = \omega_0$ scheint zunächst uninteressant, weil diese exakte Gleichheit in der Natur nicht realisiert sein wird. Er ist aber wichtig, weil er den Übergang zwischen starker und schwacher Dämpfung charakterisiert und — wie zu sehen sein wird — einen günstigen Grenzfall beschreibt, sowie aus der mathematischen Fragestellung her.

In diesem Fall gibt es nur eine doppelte Wurzel

$$\lambda_{1,2} = -\beta \tag{1}$$

und eine Lösung

$$x(t) = e^{-\beta t}. \tag{2}$$

Das reicht aber nicht aus, um zwei Anfangsbedingungen zu erfüllen. Wir brauchen eine zweite linear unabhängige Lösung, die Frage ist nur, wie man sie konstruiert. Wir werden zunächst eine heuristische und dann eine breiter anwendbare Lösung kennenlernen.

1.1 Als Grenzfall der schwach gedämpften Lösung

Betrachten wir noch einmal die Lösung der schwachen Dämpfung,

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(x_0 \cos\omega t + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \sin\omega t\right). \tag{3}$$

Die Größe $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ geht im Grenzwert der kritischen Dämpfung gegen Null. In unserer Lösung bedeutet das

$$\cos\omega t \to 1, \qquad \frac{\sin\omega t}{\omega} \to t. \tag{4}$$

Damit wird die Lösung zu

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(x_0 + (v_0 + \beta x_0)t\right). \tag{5}$$

Das enthält jetzt beide Anfangswerte und ist somit möglicherweise die allgemeine Lösung. Man beachte, dass dieser sinnvolle Grenzwert nur herauskam, weil die Lösung in einer Form benutzt wurde, in der auch die versteckte Abhängigkeit von ω in C_1 bzw. C_2 enthalten ist.

Da diese Lösung auf unkonventionelle Weise erhalten wurde, sollte man auf jeden Fall nachprüfen, ob sie tatsächlich die DGL mit den Anfangsbedingungen löst.

Zunächst einmal erfüllt sie wirklich $x(0) = x_0$. Für die Geschwindigkeit rechnet man aus

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t) + e^{-\beta t}(v_0 + \beta x_0), \tag{6}$$

mit der gewünschten Konsequenz $\dot{x}(0) = v_0$. Beide Anfangsbedingungen sind also gewährleistet. Die Beschleunigung ist

$$\ddot{x}(t) = -\beta\dot{x}(t) - \beta e^{-\beta t}(v_0 + \beta x_0). \tag{7}$$

Einfaches Ausrechnen von $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x$ zeigt dann, dass es tatsächlich verschwindet (man muss nur $\omega_0 = \beta$ zusätzlich verwenden). Die allgemeine Lösung ist also tatsächlich konstruiert.

1.2 Allgemeinere Formulierung

Ein Verfahren, das bei doppelten Nullstellen oft zum Ziele führt, besteht darin, die gefundene eine Lösung mit einer unbekannten Funktion multipliziert als Ansatz zu verwenden, d. h.

$$x(t) = \phi(t)e^{-\beta t}. \tag{8}$$

Ableiten und Einsetzen von

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\dot{\phi} - \beta\phi\right) e^{-\beta t} \\ \ddot{x}(t) &= \left(\ddot{\phi} - \beta\dot{\phi}\right) e^{-\beta t} - \beta\dot{x} \end{aligned} \tag{9}$$

in die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \beta^2 x = 0 \tag{10}$$

ergibt

$$0 = \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \beta^2 x = \ddot{\phi}e^{-\beta t}, \tag{11}$$

und somit

$$\ddot{\phi}(t) = 0. \tag{12}$$

Das hat die allgemeine Lösung

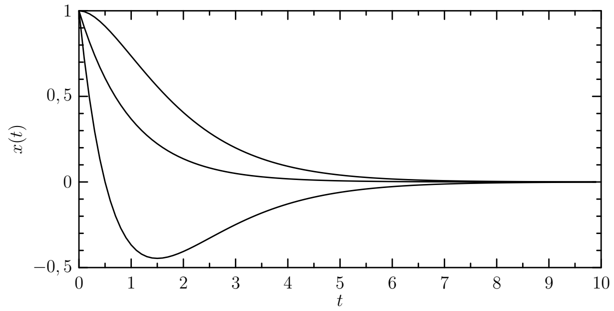
$$\phi(t) = A_1 + A_2 t, \tag{13}$$

woraus man auf eine Lösung der Form (5) geführt wird.

1.3 Eigenschaften

Die Lösung (5) fällt für größere Zeiten auf jeden Fall exponentiell ab. Für größere Zeiten dominiert der Term mit $te^{-\beta t}$.

Kann sie noch einmal durch Null gehen wie die stark gedämpfte Lösung? Die Abbildung zeigt, dass das möglich ist; überhaupt ähnelt der Verlauf der Lösung sehr der stark gedämpften. Auf jeden Fall zeigt sie keine Schwingung mehr, so dass man sie auch den *aperiodischen Grenzfall* nennt.



Der Fall kritischer Dämpfung mit $x_0 = 1$, $v_0 = 0, -1, -3$.

Die praktische Bedeutung des aperiodischen Grenzfalls liegt darin, dass er am schnellsten abklingt. Für große Zeiten war ja im Fall der starken Dämpfung

$$x_s(t \to \infty) \propto e^{-(\beta-\gamma)t}, \tag{14}$$

während sich die kritisch gedämpfte Lösung wie

$$x_k(t \to \infty) \propto e^{-\beta t} \tag{15}$$

verhält. Das Verhältnis beider geht also wie

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_k(t)}{x_s(t)} \propto \lim_{t\to\infty} e^{-\gamma t} = 0, \tag{16}$$

weil $\gamma > 0$. Da der Grenzwert Null ist, interessieren etwaige Vorfaktoren in den Lösungen nicht.

Die kritisch gedämpfte Lösung kehrt also schneller in die Ruhelage zurück als jede andere Lösung. Das ist in vielen Anwendungen ein wünschenswertes Verhalten.

2 Der angeregte Oszillator

Die Differentialgleichung ist in diesem Falle

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m}F(t) \tag{17}$$

Es liegt nahe, für die Zeitabhängigkeit der anregenden Kraft ebenfalls periodisches Verhalten anzunehmen:

$$F(t) = f\cos\bar{\omega}t \tag{18}$$

(Für beliebiges Zeitverhalten der äußeren Kraft kann man die Reaktion des Oszillators im Rahmen der *Fourier-Analyse* durch Zerlegen nach Frequenzen $\bar{\omega}$ berechnen; das führt aber jetzt mathematisch noch zu weit).

Wir versuchen wieder eine Lösung im Komplexen, indem die Gleichung umgeschrieben wird zu

$$\ddot{z}(t) + 2\beta\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{f}{m}e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}. \tag{19}$$

Der Realteil dieser Gleichung stimmt mit der Gleichung (17) mit (18) überein, während der Imaginärteil überflüssig ist. Es wird also vermutlich in diesem Fall die physikalische Lösung einfach durch den Realteil der Lösung $z(t)$ gegeben sein. Das funktioniert aber, wie schon gesagt, nicht für die Lösung der homogenen Gleichung!

Gleichung (19) ist eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, aber jetzt inhomogen. Wir brauchen also eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, während die allgemeine Lösung durch die für den gedämpften Oszillator ohne äußere Kraft gegeben ist.

Wie wird das physikalisch aussehen? Die Lösungen für den homogenen Fall — ganz gleich, wie sie im Detail aussehen — gehen auf jeden Fall exponentiell gegen Null, so dass nach langer Zeit nur die spezielle Lösung für die inhomogene Gleichung übrigbleiben wird. Es ist zu erwarten, dass der Oszillator dann mit der Frequenz der äußeren Kraft schwingen wird, so dass der Ansatz

$$z(t) = Ae^{\mathrm{i}\bar{\omega}t} \tag{20}$$

mit einer komplexen Konstanten A naheliegt. Für eine inhomogene Gleichung ist A nicht mehr beliebig wählbar, sondern muss schon in die Rechnung einbezogen werden.

Einsetzen gibt

$$(-A\bar{\omega}^2 + 2\mathrm{i}A\beta\bar{\omega} + A\omega_0^2)e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t} = \frac{f}{m}e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}. \tag{21}$$

Da wieder die Exponentialfunktion herausgekürzt werden kann, liefert diese Gleichung sofort einen Ausdruck für den komplexen Vorfaktor

$$A = -\frac{f}{m}\frac{1}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 - 2\mathrm{i}\beta\bar{\omega}}. \tag{22}$$

Das ist offensichtlich komplex, und, dass die so konstruierte spezielle Lösung wirklich funktioniert, ist klar.

Was bedeutet ein komplexer Vorfaktor in einer Schwingung? Er lässt sich zerlegen als

$$A = |A|e^{\mathrm{i}\phi}, \tag{23}$$

womit die Lösung sich schreiben lässt als

$$\begin{aligned} z(t) &= Ae^{\mathrm{i}\bar{\omega}t} \\ &= |A|e^{\mathrm{i}\phi}e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t} \\ &= |A|e^{\mathrm{i}(\bar{\omega}t+\phi)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Die physikalische Lösung als Realteil von $z(t)$ wird zu

$$x(t) = |A|\cos(\bar{\omega}t + \phi). \tag{25}$$

Der Betrag von A beschreibt also die *Amplitude* der Schwingung, während ϕ die *Phasenverschiebung* angibt.

Die Bestimmung von Betrag und Phase der Lösung (22) ist einfach. Um den Nenner reell zu machen, erweitert man wieder mit dem komplex konjugierten des Nenners (ähnlich wie bei der komplexen Division):

$$\begin{aligned} A &= -\frac{f}{m}\frac{1}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 - 2\mathrm{i}\beta\bar{\omega}} \cdot \frac{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 + 2\mathrm{i}\beta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 + 2\mathrm{i}\beta\bar{\omega}} \\ &= -\frac{f}{m}\frac{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 + 2\mathrm{i}\beta\bar{\omega}}{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Der Betrag davon lässt sich einfach angeben, wenn man bemerkt, dass der Nenner das Betragsquadrat des Zählers ist:

$$|A| = \frac{f}{m}\frac{1}{\sqrt{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2}}. \tag{27}$$

Für die Phase dagegen kann man den Vorfaktor und den Nenner völlig ignorieren:

$$\tan\phi = \frac{2\beta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2}, \tag{28}$$

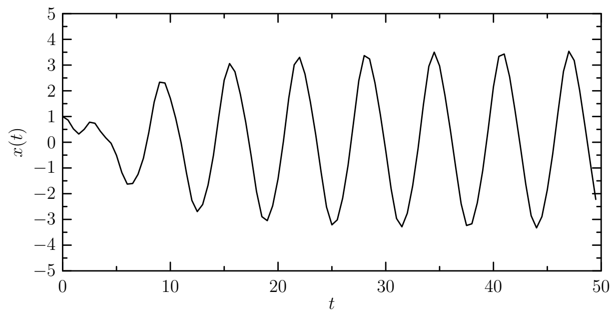
wobei noch darüber zu reden sein wird, wie die Mehrdeutigkeit des arctan zu beheben ist (s. u.).

Die allgemeine Lösung des harmonischen Oszillators mit anregender Kraft ist

$$x(t) = |A|\cos(\bar{\omega}t + \phi) + x_{\mathrm{ud}}(t), \tag{29}$$

wobei $x_{\mathrm{ud}}(t)$ die allgemeine Lösung des gedämpften Oszillators, also irgendeiner der früher behandelten Fälle schwach, stark oder kritisch gedämpfte Lösung ist. Dieser Teil beschreibt aber nur *Einschwingvorgänge*, da er exponentiell abklingt und dann nur noch der erste Teil in (29) übrigbleibt. Es ist also am wichtigsten, die Eigenschaften dieser Lösung anzusehen.

Ein Beispiel für eine angeregte Schwingung ist in der Abbildung gezeigt.



Ein Beispiel für eine angeregte Schwingung. Parameter: $x_0 = 1$, $v_0 = 0$, $f/m = 1$, $\omega_0 = \bar{\omega} = 1$, $\beta = 0.15$. Man erkennt gut die Einschwingvorgänge mit Übergang zu regelmäßigen Schwingungen im Rhythmus der äußeren Kraft.

3 Amplitude der angeregten Schwingung

Die Amplitude

$$|A| = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2}} \tag{30}$$

ist einfach proportional der Stärke der anregenden Kraft f. Wenn man die Eigenschaften des Oszillators ω_0 und β festhält, ist ihre Abhängigkeit von der Frequenz $\bar{\omega}$ der anregenden Kraft interessant. Dazu ein paar Überlegungen:

- im Grenzfall $\bar{\omega} \to 0$ wird

  $$|A| \to \frac{f}{m\omega_0^2} = \frac{f}{k}, \tag{31}$$

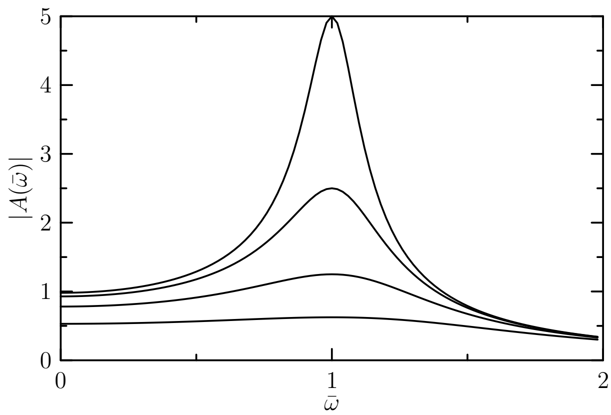
  was einfach der statischen Auslenkung des Oszillators bei konstanter äußerer Kraft entspricht.

- Für eine sehr schnell oszillierende äußere Kraft, d. h. für den Grenzfall $\bar{\omega} \to \infty$ dominiert in der Wurzel der Term $\bar{\omega}^4$ und es wird

  $$|A| \to \frac{f}{m\bar{\omega}^2} \to 0. \tag{32}$$

  Der Oszillator reagiert also im Grenzfall überhaupt nicht mehr auf die äußere Kraft, weil er ihr nicht folgen kann.

- Für beliebige anregende Frequenz ist in der Abbildung die Amplitude als Funktion der anregenden Frequenz $\bar{\omega}$ und für verschiedene Reibungkoeffizienten gezeigt.



Resonanzverhalten des Oszillators für $\beta = (0.1, 0.2, 0.4, 0.8)$ mit $\omega_0 = 1$ und $f/m = 1$. Mit zunehmender Reibung geht das Maximum herunter.

Man erkennt, dass bei niedriger Reibung die Anregung des Oszillators natürlich am stärksten ist und sich in der Nähe der Eigenfrequenz ω_0 konzentriert – das Phänomen der *Resonanz*. Für verschwindende Reibung erhält man sogar aus (30)

$$|A| = \frac{f/m}{|\bar{\omega}^2 - \omega_0^2|}, \tag{33}$$

was bei $\bar{\omega} = \omega_0$ unendlich wird, die *Resonanzkatastrophe*.

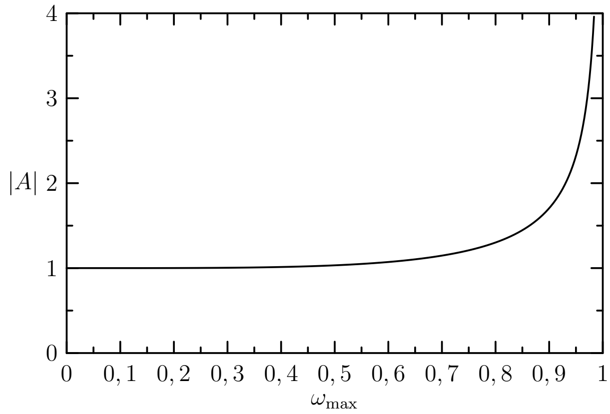
- Der Maximalwert der Amplitude als Funktion von $\bar{\omega}$ wird erreicht, wenn der Ausdruck unter der Wurzel minimal wird. Die Bedingung

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\omega}} \left((\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2 \right) = 4(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)\bar{\omega} + 8\beta^2\bar{\omega} \tag{34}$$

hat die drei Lösungen

$$\bar{\omega} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\omega} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \tag{35}$$

von denen die beiden letzten auf dasselbe hinauslaufen, weil das Vorzeichen von $\bar{\omega}$ keine Rolle spielt. Die maximale Anregung passiert also immer bei einer anregenden Frequenz, die kleiner ist als die *Eigenfrequenz* ω_0 des Oszillators. Die Abbildung zeigt die Frequenz der maximalen Anregung und die zugehörige Amplitude, wobei mit wachsender Reibung der Kurve nach unten zu folgen ist. Für $\beta \to 0$ geht das, wie gesagt, gegen Unendlich, für $\beta > \omega_0/\sqrt{2}$ gibt es kein Maximum mehr.



Die Position des Maximums der Resonanzkurven.