9. Vorlesung Wintersemester

1 Die Phase der angeregten Schwingung

- Wertebereich: bei der oben abgeleiteten Formel

  $$\tan\phi = \frac{2\beta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2}. \tag{1}$$

  ist noch zu sehen, in welchem Bereich der Winkel liegt. Aus der ursprünglichen Formel für die komplexe Amplitude

  $$A = -\frac{f}{m}\frac{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 + 2\mathrm{i}\beta\bar{\omega}}{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2}. \tag{2}$$

  ersieht man, dass der Realteil beide Vorzeichen haben kann, aber der Imaginärteil immer negativ ist. Um den Winkel zu bestimmen, reicht der Zähler Z des Bruches aus, da alles andere reell ist. Betrachten wir also den Real- und den Imaginärteil des Zählers (das Vorzeichen vor dem Bruch muss natürlich mitgenommen werden):

  $$\Re(Z) = -\left(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2\right) = \omega_0^2 - \bar{\omega}^2, \qquad \Im(Z) = -2\mathrm{i}\beta\bar{\omega}, \tag{3}$$

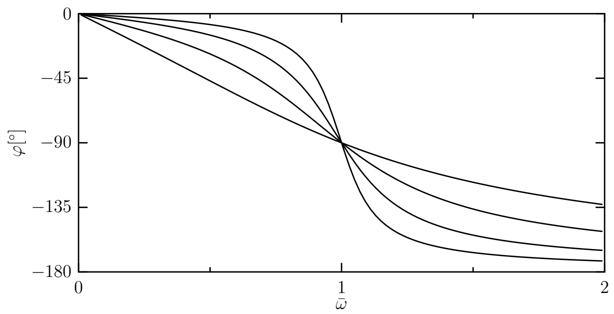
  Wir stellen fest: der Imaginärteil ist immer negativ, während der Realteil beide Vorzeichen annehmen kann. Auf jeden Fall liegt die komplexe Zahl also in der Halbebene mit negativem Imaginärteil, also bei ϕ zwischen π und 2π, wofür man aber häufiger den Bereich $-\pi$ bis 0 wählt. Das ist äquivalent wegen der Periodizität des Winkels.

- Für $\bar{\omega} \to 0$ ist Z eine positive reelle Zahl, also $\phi = 0$ — die statische Auslenkung des Oszillators geht natürlich in Richtung der Kraft.

- Für $\bar{\omega} = \omega_0$ wird $\Re(Z) = 0$, also wegen $\Im(Z) < 0$ $\phi = -\pi/2$.

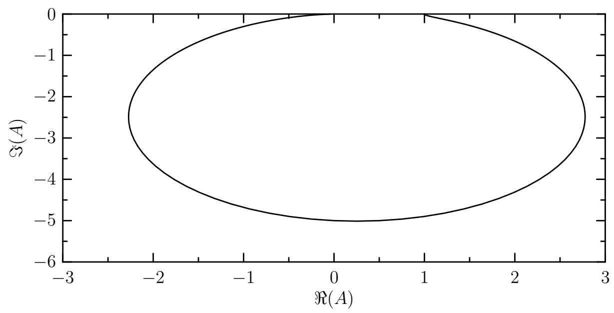
- Für $\bar{\omega} > \omega_0$ ist $\Re(Z) < 0$, also $-\pi < \phi < -\pi/2$. Die Auslenkung des Oszillators geht also entgegen der momentanen Kraftrichtung. Für $\bar{\omega} \to \infty$ geht A selbst zwar gegen Null, da $\bar{\omega}$ mit höherer Potenz im Nenner steht, aber es geht in diesen Grenzwert von negativen Werten her bei $\phi = -\pi$. In diesem Grenzwert ist also die Auslenkung des Oszillators stets der Kraft entgegengerichtet.

- Für den allgemeinen Fall sind die Kurven im folgenden Bild aufgezeichnet. Die Resonanz ist durch einen steilen Durchgang der Phasenverschiebung durch $-\pi/2$ gekennzeichnet.



Phasenverhalten des Oszillators für $\beta = (0.1, 0.2, 0.4, 0.8)$ mit $\omega_0 = 1$. Mit abnehmender Reibung werden die Kurven steiler.

Das Verhalten von A selbst ist im folgenden Bild gezeigt. Es beschreibt die nahezu kreisförmige Kurve im Uhrzeigersinn, beginnend bei f/k auf der positiven Achse für $\bar{\omega} = 0$, durchsticht die negative imaginäre Achse bei $\bar{\omega} = \omega_0$ und geht für große $\bar{\omega}$ von links in die Null.



Die komplexe Amplitude als Funktion von $\bar{\omega}$ für $\omega_0 = 1$, $\beta = 0.1$, $f/m = 1$.

2 Eindimensionale Bewegung mit beliebiger ortsabhängiger Kraft

Für diesen Fall gibt es ebenfalls ein allgemeines Verfahren, dessen Ideen sich auch im dreidimensionalen Fall als nützlich erweisen werden.

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} = F(x). \tag{4}$$

In einem ersten Schritt multiplizieren wir diese Gleichung mit $\dot{x}$:

$$m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}F(x). \tag{5}$$

Das kann man als Ableitung nach der Zeit umformulieren, weil

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\dot{x}^2 = 2\dot{x}\ddot{x} \tag{6}$$

gilt und man die rechte Seite ebenfalls umschreiben kann, wenn man das *Potential*

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \tag{7}$$

benutzt. Damit wird nämlich

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{8}$$

und

$$F(x)\dot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}. \tag{9}$$

Was bedeutet die letzte Ableitung? V wird nach der Zeit differenziert, ist aber eigentlich ja eine Funktion des Ortes. Man betrachtet die Änderung des Potentials als Funktion der Zeit, wenn man der Bahnkurve $x(t)$ folgt.

Wir haben somit die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}. \tag{10}$$

Jetzt kann auf beiden Seiten integriert werden:

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = -\left(V(x(t)) - V(x_0)\right). \tag{11}$$

Wenn wir die Terme anders zusammenfassen, wird daraus

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x(t)) = \frac{m}{2}v_0^2 + V(x_0). \tag{12}$$

Rechts stehen konstante Beiträge, die aus der Anfangsbedingung berechnet werden können, während links dieselben zu einer späteren Zeit stehen. Das Resultat ist also, dass auch die linke Seite zeitunabhängig sein muss: die *Energie*

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x(t)) \tag{13}$$

ist während der Bewegung erhalten. Bevor wir die allgemeinen Konsequenzen diskutieren, zunächst hier die Möglichkeit, eine Lösung der Bewegungsgleichung zu konstruieren. Aus (13) erhält man

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x(t))\right)} \tag{14}$$

und mit Separation der Variablen

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x(t))\right]}}, \tag{15}$$

woraus die Lösung durch Integration erfolgt

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x')\right)}}. \tag{16}$$

Damit ist die Lösung im mathematischen Sinne konstruiert — ob sie nützlich ist, hängt davon ab, ob sich das Integral berechnen lässt und ggf. ob sich aus $t(x)$ die Umkehrfunktion $x(t)$ berechnen lässt.

Rekapitulieren wir nun einige der Definitionen.

3 Die kinetische Energie

Sie ist definiert als

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{17}$$

und ist per Definition immer positiv.

4 Das Potential

Das Potential $V(x)$ wird definiert als

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x'. \tag{18}$$

Das ist möglich für eine beliebige nur ortsabhängige Kraft. Umgekehrt ist dann

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}. \tag{19}$$

V(x) ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt; in der Definition ist deswegen die untere Grenze des Integrals willkürlich wählbar. In der Praxis ist es oft vorteilhaft, eine spezielle Wahl zu treffen.

4.1 Beispiele

- Für das *Gravitationsfeld* nahe der Erdoberfläche kann man eindimensional rechnen, wenn es eine rein senkrechte Bewegung in der Koordinate z ist, dann ist $F = -mg$. Integrieren führt auf

  $$V(z) = V(z_0) + mg(z - z_0). \tag{20}$$

  Wenn man als Bezugspunkt $z_0 = 0$ auf der Erdoberfläche nimmt und dort $V(z_0) = 0$ setzt, erhält man

  $$V(z) = mgz. \tag{21}$$

  Das ist der Grund für eine wichtige Veranschaulichung des Potentials: die Bewegung eines Punktteilchens im Potential kann man sich als in einem Gebirge vorstellen, das an der Stelle (x, y) die Höhe $V(x, y)$ hat.

- Für den *eindimensionalen harmonischen Oszillator* mit $F = -kx$ wird bei der natürlichen Wahl von x_0 im Ruhepunkt des Oszillators

  $$V(x) = \frac{k}{2}x^2. \tag{22}$$

In manchen Büchern wird ein Unterschied gemacht zwischen *Potential* und *potentieller Energie*. Das bisher diskutierte $V(x)$ entspricht dabei der potentiellen Energie, während als Potential V/m benutzt wird. Das stammt wahrscheinlich aus der Elektrostatik, wo die potentielle Energie einer Ladung q im elektrischen Feld von der Größe der Ladung abhängt, während das Potential, die durch die Ladung q dividierte potentielle Energie, von q unabhängig ist und nur vom Feld abhängt. Im Gravitationsfeld wie oben ist ja ebenso die potentielle Energie mgz von der Masse abhängig, die sich im Feld bewegt, während das Potential gz universell gültig ist. Weil in der Mechanik nur der spezielle Fall des Gravitationsfeldes sich dafür eignet, ist aber diese Definition nicht so weit verbreitet.

5 Die Gesamtenergie

Die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{m}{2}v^2 + V(x) \\ &= \frac{p^2}{2m} + V(x) \end{aligned} \tag{23}$$

ist während der Bewegung erhalten.

6 Die Arbeit

Sie ist definiert als “Kraft mal Weg”, differentiell gesprochen

$$\mathrm{d}A = F(x)\mathrm{d}x. \tag{24}$$

Für eine ortsabhängige Kraft ist dann die Arbeit bei einer Bewegung von x_1 nach x_2

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x = -\left(V(x_2) - V(x_1)\right) \tag{25}$$

Man beachte, dass man bei der Berechnung der Arbeit angeben muss, welche Kraft eigentlich Arbeit leistet: in einem Kraftfeld kann man z. B. Arbeit gegen das Feld leisten, um ein Teilchen an einen Ort höheren Potentials zu bringen: diese Arbeit ist dann positiv, weil sie von der Kraft $-F$ geleistet wurde; wenn dann das Kraftfeld das Teilchen wieder zurückbefördert, leistet es ebenfalls eine positive Arbeit.

7 Konsequenzen der Energieerhaltung

Aus der Energieerhaltung kann man viele Eigenschaften der Bewegung ableiten, ohne die volle Lösung für $x(t)$ berechnen zu müssen. Dies sei am Beispiel des Oszillators illustriert (s. Abbildung).

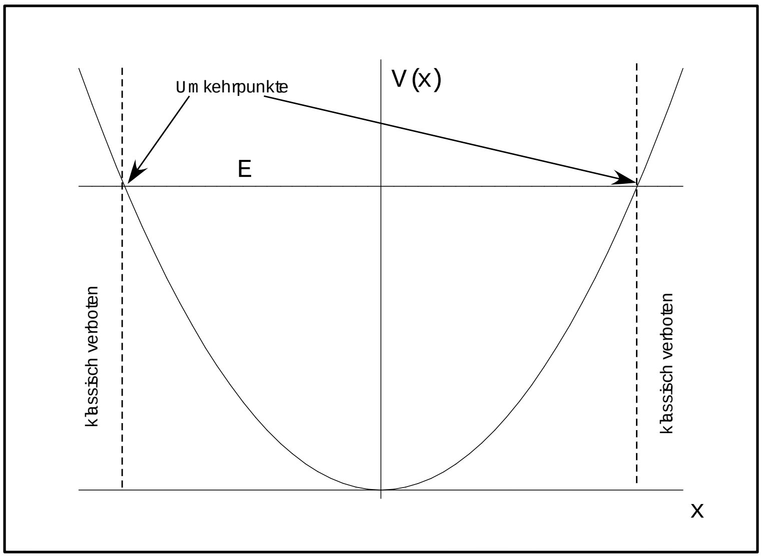


Illustration wichtiger Bewegungsbereiche am Beispiel des Oszillatorpotentials.

Für eine gegebene Gesamtenergie E, die man als horizontale Gerade einzeichnen kann, ist an der Stelle x die kinetische Energie $T = E - V(x)$. Daraus folgen einige spezielle Punkte:

1. Die *Umkehrpunkte* der Bewegung liegen dort, wo die Gesamtenergie das Potential schneidet, also $V(x) = E$ gilt. Dort ist $T = 0$, die Bewegung stoppt und der Körper dreht um.

2. In den Bereich, in dem $V(x) > E$ ist, kann das Teilchen nicht eindringen, weil dort $T < 0$ sein müsste, was nicht möglich ist. Das ist die *klassisch verbotene* Region (in der Quantenmechanik kann ein Teilchen das doch und sogar ganze verbotene Bereiche “durchtunneln” — das ist der sog. Tunneleffekt).

3. Bei $x = 0$ ist $V = 0$ und die kinetische Energie maximal.

Die Anfangsbedingungen sind für diese Herangehensweise auch wichtig, gehen aber anders ein, da man die Energie berechnen muss. Man benutzt zuerst $E = \frac{m}{2} v_0^2 + V(x_0)$ und kann dann über die Energieerhaltung einer Stelle x den Absolutwert der Geschwindigkeit $|v_0|$ zuordnen. Andererseits ist oft auch die Energie selbst direkt vorgegeben.