12. Vorlesung Wintersemester

1 Motivation: Planetenbewegung

Das klassische Problem der Mechanik, das auch große Bedeutung für die Geistesgeschichte hat, ist das der Bewegung der Planeten. Wenn man den Einfluss anderer Planeten vernachlässigt, sind die Bewegungsgleichungen für die Sonne (S) und den Planeten (p)

$$m_S \ddot{\vec{r}}_S = \gamma \frac{m_S m_p}{|\vec{r}_p - \vec{r}_S|^3}(\vec{r}_p - \vec{r}_S), \qquad m_p \ddot{\vec{r}}_p = -\gamma \frac{m_S m_p}{|\vec{r}_p - \vec{r}_S|^3}(\vec{r}_p - \vec{r}_S). \tag{1}$$

Das Vorzeichen der Gravitationskraft muss dabei immer so gewählt werden, dass es auf den anderen Körper zeigt. Natürlich gilt nach dem dritten Newtonschen Axiom, dass die Kräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind.

Das sind zwei gekoppelte Bewegungsgleichungen für zwei Massenpunkte, die sehr kompliziert aussehen, vor allem, wenn man sie in den Komponenten der Vektoren ausdrückt. Glücklicherweise gibt es Vereinfachungsmethoden, denen wir uns jetzt zuwenden. Das sind

- die Reduktion auf ein Einkörperproblem und
- die Behandlung des Systems in besser geeigneten Koordinaten.
- die Lösung von skalaren Gleichungen (Erhaltungssätze) statt Vektorgleichungen

2 Das Zweikörperproblem

Man kann das Zweikörperproblem von Sonne und Planet sofort vereinfachen, wenn man annimmt, dass die Masse der Sonne sehr groß gegenüber der des Planeten ist. Da die Kraft auf beide vom Betrag her gleich ist, bewegt sich die Sonne entsprechend weniger, so dass man sie als ruhend annehmen kann. Dann benutzt man den Ortsvektor der Sonne als Ursprung, $\vec{r}_S = 0$, und hat nur noch eine Bewegungsgleichung für den Planeten,

$$m_p \ddot{\vec{r}}_p = -\gamma \frac{m_S m_p}{r_p^3}\vec{r}. \tag{2}$$

Es ist aber möglich und ein sehr wichtiges allgemeines Ergebnis der Mechanik, auch im allgemeinen Fall das Zweikörperproblem auf die Bewegung eines Körpers zu reduzieren. Das gelingt über die Transformation auf *Schwerpunkts- und Relativkoordinaten*.

2.1 Gesamtimpuls und Schwerpunkt

Wenn zwei Körper aufeinander Kräfte ausüben, lauten die Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2. \tag{3}$$

Nach dem dritten Newtonschen Axion gilt aber $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ und Addieren der beiden Gleichungen führt auf

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = 0. \tag{4}$$

Die Größe $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$ hat also eine konstante Zeitableitung. Da sie keinen Ortsvektor darstellt, muss man noch durch eine Masse dividieren und definiert den *Schwerpunkt* (engl. *center of mass*)

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{5}$$

wobei auch die *Gesamtmasse*

$$M = m_1 + m_2 \tag{6}$$

nützlich ist. Die Division durch die Gesamtmasse liegt nahe; dass sie wirklich die beste Wahl ist, ergibt sich aus dem Folgenden.

Im Anschluss daran kann man den Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{7}$$

definieren, der durch die Schwerpunktsgeschwindigkeit ausgedrückt werden kann:

$$\vec{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = M\dot{\vec{R}}. \tag{8}$$

Für ihn gilt Erhaltung $\dot{\vec{P}} = 0$; er ist aber auch nützlich in dem allgemeineren Fall, dass äußere Kräfte wirken (mit Index x bezeichnet). Dann sind nämlich die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1x}, \qquad \dot{\vec{p}}_2 = -\vec{F}_1 + \vec{F}_{2x}, \tag{9}$$

und Addieren ergibt

$$M\ddot{\vec{R}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = \vec{F}_x. \tag{10}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also unter dem Einfluss der äußeren Kräfte so, als ob in ihm die gesamte Masse vereinigt wäre. Wenn keine äußeren Kräfte einwirken, ist der Gesamtimpuls erhalten und der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig.

Für verschwindende äußere Kräfte kann man durch eine *Galileitransformation* zu Koordinaten übergehen, in denen der Schwerpunkt ruht; i. A. kann man dann sogar das Koordinatensystem so wählen, dass $\vec{R} = 0$ ist.

Der Schwerpunkt liegt immer auf der Geraden zwischen den beiden Massenpunkten. Dies wird klar, wenn man die Definition (5) umformt zu

$$\vec{R} = \frac{m_1 + m_2}{M}\vec{r}_1 + \frac{-m_2\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \tag{11}$$

Wenn m_2 von 0 bis zu M (für den Fall $m_1 = 0$) anwächst, läuft also $\vec{R}$ von $\vec{r}_1$ auf der Verbindungsgeraden bis zu $\vec{r}_2$. Im Spezialfall $m_1 = m_2$ liegt der Schwerpunkt gerade in der Mitte zwischen beiden.

Wir haben nun herausgearbeitet, dass der Schwerpunkt im Falle verschwindender äußerer Kräfte eine triviale Bewegung beschreibt bzw. durch geeignete Wahl des Koordinatensystems sogar im Ursprung liegt. Es fehlt aber noch ein zweiter Vektor, damit die Transformation vom Vektorpaar $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ auf $(\vec{R}, ??)$ vollständig wird.

3 Reduktion des Zweikörperproblems

Wenn keine äußeren Kräfte wirken, kann das Problem zweier Körper, die aufeinander Kräfte ausüben, auf ein Einkörperproblem und die triviale Schwerpunktsbewegung reduziert werden.

Die Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ werden ersetzt durch die beiden Vektoren *Schwerpunkt* und *Relativkoordinate*

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{12}$$

Die Bewegungsgleichungen werden damit zu

$$M\ddot{\vec{R}} = 0 \tag{13}$$

mit der Gesamtmasse

$$M = m_1 + m_2. \tag{14}$$

Die Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate ist nunmehr zu bestimmen aus

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \\ &= \frac{1}{m_1}\vec{F}_1 - \frac{1}{m_2}\vec{F}_2 \\ &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_1. \end{aligned}$$

Das sieht wieder aus wie die Bewegungsgleichung eines Punktteilchens, wenn man den Ausdruck in der Klammer rechts als Kehrwert einer Masse, nämlich der *reduzierten Masse* μ ansieht:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{15}$$

Damit bewegt sich die Relativkoordinate so, als ob ein Punktteilchen mit der reduzierten Masse die Kraft auf Teilchen 1 erfährt:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1. \tag{16}$$

Da diese Kraft nur von $\vec{r}$ abhängen darf, sind die beiden Gleichungen entkoppelt.

Die Umkehrtransformationen zu (5) und (12) sind

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}. \tag{17}$$

Wenn man das in die gesamte kinetische Energie

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} \tag{18}$$

einsetzt, findet man, dass sie in zwei Teile zerfällt:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2. \tag{19}$$

Die reduzierte Masse erscheint also überall als die der Relativbewegung zugeordnete Masse, während die Gesamtmasse als Masse für die Schwerpunktsbewegung auftritt.

4 Drehimpuls im Zweikörperproblem

Der Gesamtdrehimpuls wird wieder als Summe der einzelnen Drehimpulse betrachtet,

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2. \tag{20}$$

Wenn man hierin die Transformation zu Schwerpunkts- und Relativkoordinate einsetzt, erhält man ohne besondere Tricks

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \tag{21}$$

Der Drehimpuls zerfällt also in den der Schwerpunktsbewegung und den der Relativbewegung, wobei bei letzterer wieder die reduzierte Masse eingeht.

5 Rechenregeln für Summen

Da jetzt eine Anzahl Umformungen mit Summen gemacht werden, hier ein paar einfache Rechenregeln.

1. Die Reihenfolge der Summierung bei Doppelsummen kann frei gewählt werden:

$$\sum_i \sum_j \ldots = \sum_j \sum_i \ldots = \sum_{ij} \tag{22}$$

2. Der Summationsindex kann umbenannt werden, ohne das Ergebnis zu ändern. Das darf natürlich nicht mit anderen Variablennamen in der Formel konfliktieren.

3. Beides zusammen kann zur Symmetrisierung benutzt werden:

$$\sum_{ij} A_{ij} = \sum_{ji} A_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(A_{ij} + A_{ji} \right). \tag{23}$$

4. Ein Faktor, der nicht vom Summationsindex abhängt, kann ausgeklammert werden:

$$\sum_i m_i \vec{R} = \vec{R} \sum_i m_i. \tag{24}$$