13. Vorlesung Wintersemester

1 Vielteilchensysteme

Die meisten Definitionen übertragen sich problemlos auf den Fall von N Teilchen: Massen m_i, Ortsvektoren $\vec{r}_i$, $i = 1 \dots N$. Es wirken Kräfte $\vec{F}_{ij}$ von Teilchen j auf Teilchen i, die dem 3. Axiom gehorchen:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \tag{1}$$

sowie äußere Kräfte $\vec{F}_{ix}$. Die Kraft eines Teilchens auf sich selbst verschwindet, $\vec{F}_{ii} = 0$.

Die Bewegungsgleichung ist für Teilchen i

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ix}. \tag{2}$$

Analog zum Zwei-Teilchen-Fall definiert man (alle Summen hier und im Folgenden laufen von 1 bis N).

Gesamtmasse: $M = \sum_i m_i$.

Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Gesamtimpuls: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$. Für ihn berechnet man

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_{ij} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_{ix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \right) + \sum_i \vec{F}_{ix} \\ &= \sum_i \vec{F}_{ix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Er erfüllt also die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{P} = \sum_i \vec{F}_{ix}, \tag{4}$$

da sich die Kräfte zwischen den Teilchen in der Summe wegen des dritten Axioms paarweise aufheben.

Der Schwerpunktssatz: der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die Masse aller Teilchen in ihm vereinigt wäre und die Summe der äußeren Kräfte einwirkte:

$$M \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_{ix}. \tag{5}$$

Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$. Er hat die Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ix} \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{ix}, \tag{6}$$

in der nur die Drehmomente der äußeren Kräfte auftreten. Die Kräfte zwischen den Teilchen fallen weg, weil für alle bekannten Kräfte $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$ gilt und damit

$$\sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) = \sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0. \tag{7}$$

Damit gilt der **Drehimpulssatz**: in einem abgeschlossenen System (keine äußeren Kräfte) ist der Gesamtdrehimpuls erhalten. Der Gesamtdrehimpuls kann zerlegt werden, wenn man Relativkoordinaten einführt:

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{R}. \tag{8}$$

Vorsicht: das ist etwas anderes als die Relativkoordinate im Zweikörperfall. Die Relativkoordinaten hier sind nicht linear unabhängig, weil sie

$$\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = \sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{R} = M\vec{R} - M\vec{R} = 0 \tag{9}$$

erfüllen müssen. Einsetzen von Gleichung (8) und ihrer Zeitableitung in die Definition des Gesamtdrehimpulses ergibt die Zerlegung

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{r}_i{}' = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i{}' \times \vec{p}_i{}' \tag{10}$$

mit den Impulsen der Relativbewegung

$$\vec{p}_i{}' = m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{r}_i{}'. \tag{11}$$

Gesamtenergie $E = T + V$. Dieser Fall ist etwas schwieriger. Wenn man die Bewegungsgleichungen wie üblich skalar mit den Geschwindigkeiten multipliziert und aufsummiert, erhält man auf der linken Seite

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

mit der *kinetischen Energie*

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2. \tag{13}$$

Auf der rechten Seite sollte man wieder versuchen, alles durch die Zeitableitung eines Potentials auszudrücken,

$$\sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \sum_j \vec{F}_{ij} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N) \tag{14}$$

mit einem *Vielteilchenpotential* V.

Wir werden das Vielteilchenpotential hier nicht in der allgemeinsten Form behandeln, sondern davon ausgehen, dass es gemäß (1) wieder auf Zweiteilchenkräften beruht und nur vom Abstand abhängt:

$$v_{ij} = v_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \tag{15}$$

womit das 3. Axiom automatisch erfüllt wird.

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i v_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = +\nabla_j v_{ji}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{F}_{ji}. \tag{16}$$

Dabei bedeutet ∇_i den Gradienten mit Bezug auf den Ortsvektor des Teilchens i.

Mit dieser Darstellung der Zweiteilchenkräfte wird

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\nabla_i v_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \nabla_j v_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{ij} v_{ij}. \end{aligned} \tag{17}$$

Dabei wurde noch

$$v_{ij} = v_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = v_{ji}(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) = v_{ji} \tag{18}$$

benutzt.

Das Vielteilchenpotential muss also in diesem Fall als

$$V(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{ij} v_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \tag{19}$$

definiert werden. Der Faktor $\frac{1}{2}$ sorgt einfach dafür, dass jedes Teilchenpaar in der potentiellen Energie nur einmal beiträgt.

Im Falle verschwindender äußerer Kräfte und konservativer Zweiteilchenkräfte ist also die Gesamtenergie

$$E = T + V = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} v_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \tag{20}$$

erhalten.