14. Vorlesung Wintersemester

1 Koordinatensysteme

Für die allermeisten Anwendungen sind folgende Koordinatensysteme geeignet:

1. kartesische (in der Ebene oder im Raum),
2. ebene Polarkoordinaten,
3. Zylinderkoordinaten und
4. sphärische (Polar-)Koordinaten (auch Kugelkoordinaten).

Kartesische Koordinaten x, y, z haben Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ bzw. $\vec{e}_z$, die man oft auch mit numerischem Index verwendet (um Summen schreiben zu können): $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Die Einheitsvektoren sind auf Eins normiert und orthogonal. Beides kann zusammengefasst werden als

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \tag{1}$$

mit dem *Kronecker-Symbol*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j \\ 1 & \text{für} \quad i = j \end{cases} \tag{2}$$

Im Gegensatz zu den Einheitsvektoren anderer Koordinatensysteme sind die kartesischen vom Ort unabhängig und deshalb auch bei Bewegungen konstant.

Mathematisch gibt man für Koordinatensysteme auch gerne die Form des Quadrates des Linienelementes an. Für kartesische Koordinaten ist

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{3}$$

Das Linienelement hängt mit der kinetischen Energie zusammen:

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right)^2, \tag{4}$$

so dass man sich nur eines von beiden merken muss.

In *Polarkoordinaten* r, φ kann man die Einheitsvektoren in der Richtung der Zunahme der jeweiligen Koordinate über

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \bigg/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \bigg/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| \tag{5}$$

konstruieren. Analog geht das auch in den anderen Koordinatensystemen. Um sie konkret zu berechnen, benötigt man nur die Transformation zu kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r} = \rho \cos\varphi \, \vec{e}_x + \rho \sin\varphi \, \vec{e}_y \tag{6}$$

liefert

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi \, \vec{e}_x + \sin\varphi \, \vec{e}_y, \qquad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \, \vec{e}_x + \cos\varphi \, \vec{e}_y. \tag{7}$$

Diese Vektoren sind tatsächlich orthonormal.

Wenn die Vektoren an einer zeitabhängigen Position gebraucht werden, also bei $\vec{r}(t)$ bzw. bei $(\rho(t),\ \varphi(t))$ muss man berücksichtigen, dass die Einheitsvektoren nun ebenfalls zeitabhängig werden! Die Ableitung ist einfach:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho. \tag{8}$$

Damit lassen sich auch Geschwindigkeit und Beschleunigung entlang der Einheitsvektoren zerlegen. Der Ortsvektor selbst kann nämlich als

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho \tag{9}$$

geschrieben werden, und man erhält durch Differenzieren

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{r} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \tag{10}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{r} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi. \tag{11}$$

Den Drehimpuls werden wir auch in Kürze benötigen. Mit den obigen Ergebnissen errechnet man

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\rho\vec{e}_\rho \times (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z. \tag{12}$$

Er steht also – wie bei einer zweidimensionalen Bewegung üblich – senkrecht auf der Bewegungsebene. Wir konstatieren nochmal seinen Betrag:

$$L = m\rho^2\dot{\varphi}. \tag{13}$$

Beispiel: Für die Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ist

$$\rho(t) = R, \qquad \varphi(t) = \omega t, \tag{14}$$

und man berechnet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{r} = R\omega\vec{e}_\varphi \tag{15}$$

sowie

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{r} = -R\omega^2\vec{e}_\rho, \tag{16}$$

also die korrekte Zentripetalbeschleunigung.

Schließlich noch Linienelement und kinetische Energie: aus (6) folgt

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\rho\cos\varphi - \rho\mathrm{d}\varphi\sin\varphi, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}\rho\sin\varphi + \rho\mathrm{d}\varphi\cos\varphi, \tag{17}$$

woraus man

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 \tag{18}$$

bzw.

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) \tag{19}$$

ausrechnet. Der Faktor ρ bei $\mathrm{d}\varphi$ im Linienelement bedeutet einfach, dass die Verschiebung im Winkel auf einem Kreis des Radius ρ erfolgt und so skaliert werden muss.

In anderen Koordinatensystemen kann man genauso vorgehen, um die Einheitsvektoren, das Linienelement und die kinetische Energie zu konstruieren. Es gibt eine größere Anzahl von Systemen mit orthogonalen Einheitsvektoren, von denen aber nur die beiden nächsten noch kurz diskutiert werden sollen.

2 Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten lauten die Transformationsgleichungen

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \tag{20}$$

Die kinetische Energie wird zu

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right), \tag{21}$$

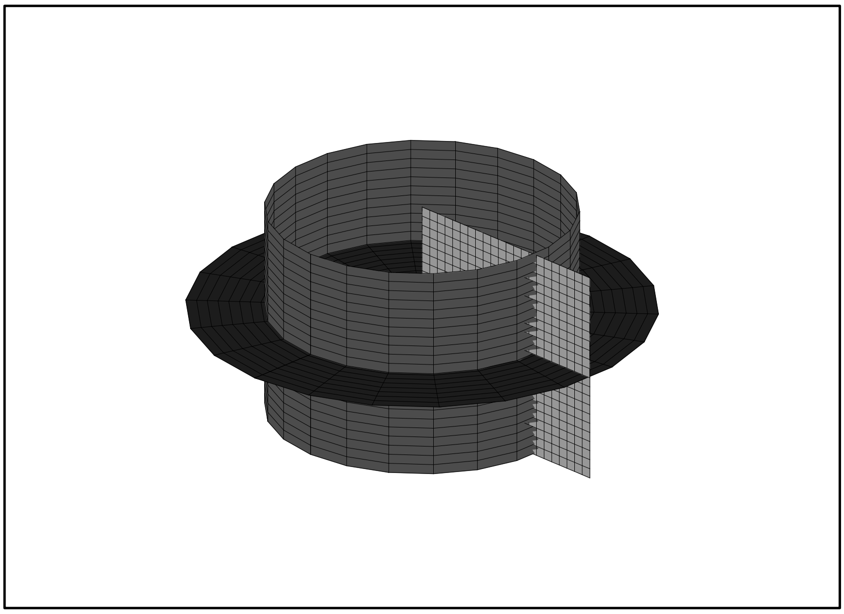
und das Quadrat des Linienelementes entsprechend

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{22}$$

Die Wertebereiche sind

$$\rho = 0 \ldots \infty, \ \varphi = 0 \ldots 2\pi, \ z = -\infty \ldots + \infty. \tag{23}$$

Insgesamt benehmen sich Zylinderkoordinaten so wie ebene Polarkoordinaten mit einer zusätzlichen kartesischen Richtung z.



Ebenen mit einer konstanten Koordinate in zylindrischen Koordinaten.

3 Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten lauten die Transformationsgleichungen

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \tag{24}$$

Die kinetische Energie wird zu

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \tag{25}$$

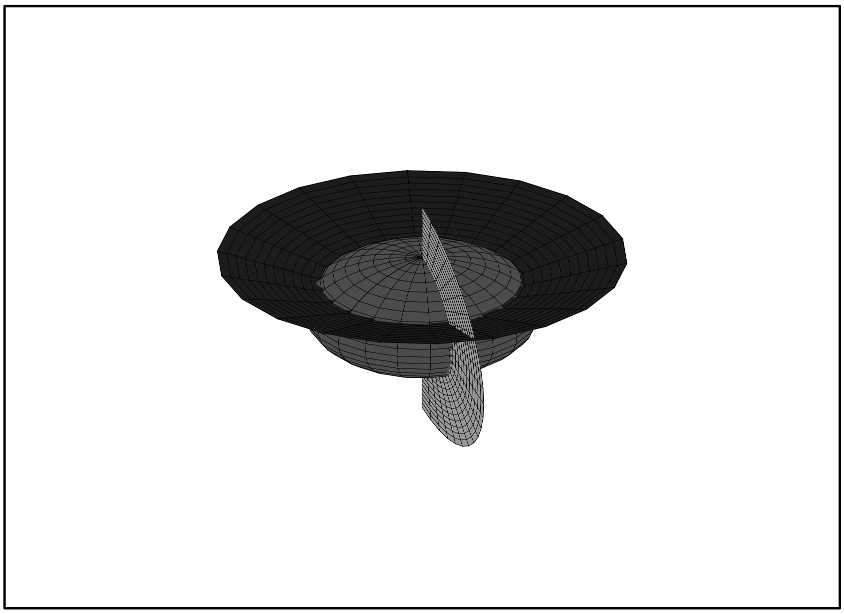
und das Quadrat des Linienelementes entsprechend

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2. \tag{26}$$

Die Faktoren im Linienelement beschreiben wieder die Größe der zu den Winkeln gehörenden Kreise: Radius r für θ und $r \sin\theta$ für φ. Die Wertebereiche sind

$$r = 0 \ldots \infty, \ \theta = 0 \ldots \pi, \ \varphi = 0 \ldots 2\pi. \tag{27}$$

Weitere Formeln, z. B. für die Vektorableitungen findet man in Formelsammlungen.



Ebenen mit einer konstanten Koordinate in sphärischen Koordinaten.