15. Vorlesung Wintersemester

1 Planetenbewegung

Die Massenverhältnisse im System Sonne-Erde sind so, dass das Zweikörperproblem mit guter Näherung auf eine feststehende Sonne und reine Erdbewegung reduziert werden kann. Das vereinfacht aber nur einige Faktoren; das Zweikörperproblem ist mit genau denselben Methoden exakt lösbar.

Man betrachtet die Sonne (Masse M) und einen Planeten (Masse m). Die einfachste Lösung geht nicht direkt von den Bewegungsgleichungen, sondern den Erhaltungsgrößen aus. Man wählt ebene Polarkoordinaten in der Bewegungsebene. Da die Gravitationskraft

$$\vec{F} = -\frac{\gamma m M}{r^3}\vec{r} \tag{1}$$

eine Zentralkraft ist, ist der Drehimpuls erhalten mit zwei Konsequenzen:

1. Die Richtung des Drehimpulses ist fest: die Bewegung spielt sich in einer Ebene senkrecht zum Drehimpuls ab.

2. Der Betrag des Drehimpulses ist konstant. Das bedeutet

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2}. \tag{2}$$

Die Gravitationskraft ist ebenso konservativ: es gilt also die Energieerhaltung in der Form

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{\rho}, \tag{3}$$

wobei $\alpha = \gamma m M$ gesetzt wurde.

Da vor allem die Bahnkurve interessiert, setzt man

$$\rho = \rho(\varphi) \tag{4}$$

ein und benutzt das Theorem zur Differentiation impliziter Funktionen:

$$\rho' := \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\varphi}}. \tag{5}$$

Der Strich kennzeichnet die Ableitung nach φ. In der Leibniz'schen Schreibweise sieht das so aus, als ob man das dt wegkürzen kann. Für $\dot{\varphi}$ wird überall der Drehimpuls eingesetzt.

Gleichung (3) wird damit zu

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{\rho'^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{\alpha}{\rho}. \tag{6}$$

Mit der naheliegenden Substitution $s = 1/\rho$ und wegen Kettenregel $s' = -\dfrac{1}{\rho^2}\rho'$ ergibt sich dann

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(s'^2 + s^2\right) - \alpha s. \tag{7}$$

Nun braucht man noch einen Trick (mit Separation der Variablen geht es auch, nur etwas umständlicher): noch einmal nach φ differenzieren führt zunächst auf

$$\frac{L^2}{2m}\left(2s's''+2ss'\right)-\alpha s'=0 \tag{8}$$

und durch einfache Umformung auf die Oszillator-ähnliche Gleichung

$$\frac{L^2}{m}\left(s''+s\right)=\alpha. \tag{9}$$

Diese DGL hat die allgemeine Lösung

$$s(\varphi)=A\cos\varphi+B\sin\varphi+\frac{m\alpha}{L^2}. \tag{10}$$

Das zeigt zunächst, dass die Bahnkurven geschlossen sind: $s(\varphi)=s(\varphi+2\pi)$. A und B sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen, die in diesem Fall nicht die Anfangszeit, sondern den Anfangspunkt der Bahnkurve betreffen. Bei einer geschlossenen Bahn ist es völlig willkürlich, welchen Punkt man als Anfangspunkt betrachtet; außerdem kann man die Richtung der x-Achse, also $\varphi=0$ noch frei wählen. Es empfiehlt sich sicher, einen hervorgehobenen Punkt der Bahn zu wählen.

Wählt man die Koordinaten speziell so, dass bei $\varphi=0$ der sonnennächste Punkt (Perihel) liegt, so folgt aus

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=0}=0,\qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=0}\le 0, \tag{11}$$

sehr einfach

$$B=0,\ A\ge 0. \tag{12}$$

Mit den Abkürzungen

$$k=\frac{L^2}{\alpha m},\quad \epsilon=Ak \tag{13}$$

wird die Lösung schließlich zu

$$s(\varphi)=\frac{1}{k}(1+\epsilon\cos\varphi) \tag{14}$$

oder wegen $\rho=1/s$

$$\rho(\varphi)=\frac{k}{1+\epsilon\cos\varphi}. \tag{15}$$

Für $\epsilon=0$ beschreibt das offensichtlich einen Kreis. Wir bemerken auch, dass für $\epsilon\ge 1$ der Nenner Null werden kann, also der Radius für gewisse Winkel gegen unendlich geht. In der nächsten Vorlesung werden wir sehen, dass die Bahnkurven Kegelschnitten entsprechen; die Bahngleichung unterscheidet sich von den vertrauten Gleichungen für diese Kurven dadurch, dass sie auf einen Brennpunkt als Ursprung bezogen ist.

2 Ellipsengleichung in Polarkoordinaten

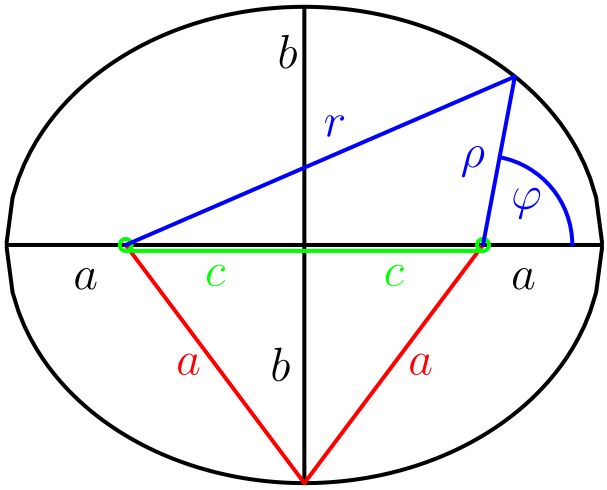
Die Parameter in der Ellipsengleichung

$$\rho(\varphi)=\frac{k}{1+\epsilon\cos\varphi} \tag{16}$$

hängen mit der großen Halbachse a, der kleinen Halbachse b und dem Abstand c zwischen dem Zentrum der Ellipse und den Brennpunkten so zusammen:

$$c=\epsilon a,\quad k=b^2/a. \tag{17}$$

Die Ableitung dieser Beziehungen geht mit Hilfe des folgenden Bildes.



Die Definition der Ellipse besagt, dass die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes auf der Ellipse zu den beiden Brennpunkten konstant sein muss, $r + \rho =$const. Wenn man den Punkt auf der x-Achse bei $\pm a$ wählt, findet man die Konstante:

$$r + \rho = 2a. \tag{18}$$

Wählt man in (wie durch die blauen Linien angedeutet) auf der y-Achse, so resultiert

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{19}$$

Dabei ist c der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt der Ellipse (Ursprung des x-y-Systems. Man definiert die *Exzentrizität* ϵ über

$$c = \epsilon a. \tag{20}$$

Jetzt gehen wir in Polarkoordinaten mit dem rechten Brennpunkt als Ursprung und ρ und φ als Koordinaten. Man wende den Kosinussatz auf das Dreieck an, das aus dem Punkt (ρ, φ) und den beiden Brennpunkten gebildet wird:

$$r^2 = (2c)^2 + \rho^2 + 2(2c)\rho \cos \varphi, \tag{21}$$

worin man $c = \epsilon a$ und $r = 2a - \rho$ einsetzt und dann nach ρ auflöst. Das Ergebnis ist

$$\rho(\varphi) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \varphi}. \tag{22}$$

Mit der Definition

$$k = a(1 - \epsilon^2) = \frac{b^2}{a} \tag{23}$$

entsteht so die Ellipsengleichung in der Form (16).

3 Zusammenhang mit Energie und Drehimpuls des Planeten

Am einfachsten findet man diesen durch Analyse der Beiträge am Perihel, wo $\dot{\rho} = 0$ gilt und der Abstand zum Brennpunkt zu

$$\rho_0 = \rho(\varphi = 0) = k/(1 + \epsilon) \tag{24}$$

wird. Man findet

$$a = -\frac{\gamma m M}{2E}\ , \quad b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}. \tag{25}$$

Die Energie ist negativ, da der Planet an die Sonne gebunden ist.