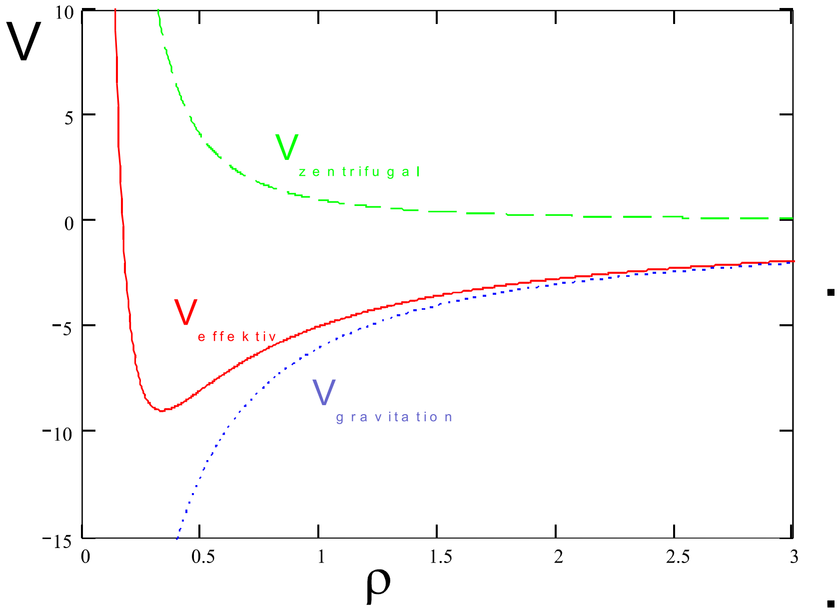
16. Vorlesung Wintersemester

1 Das effektive Potential

Wegen des konstanten Drehimpulses kann man in der Energiebilanz

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \gamma\frac{mM}{\rho} \tag{1}$$

die beiden letzteren Terme zusammen als *effektives Potential* einer eindimensionalen Bewegung betrachten. Der Term mit dem Drehimpuls spielt dabei die Rolle eines *Zentrifugalpotentiales*. Eine Betrachtung der klassisch erlaubten bzw. verbotenen Bereiche in ρ erklärt besonders anschaulich die Variation der Bahnformen als Funktion der Gesamtenergie.



2 Keplersche Gesetze

1. Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Gesetz: Der Fahrstrahl zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (*Flächensatz*). Aus diesem zweiten Gesetz folgt die Erhaltung des Betrages des Drehimpulses, zusammen mit dem ersten auch die seiner Richtung, weil der Drehipuls ja immer senkrecht auf der Bahnebene stehen muss. Für die in dt überstrichene Fläche dF gilt

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{2m} L \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

3. Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen,

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}, \tag{3}$$

oder: das Verhältnis $\frac{T^2}{a^3}$ hat denselben Wert für alle Planeten.

Ableitung: nach dem Flächensatz (2) muss die gesamte während eines Umlaufs überstrichene Fläche einfach $\frac{LT}{2m}$ sein. Dies ist gleich der Fläche der Ellipse πab. Einsetzen in $\frac{T^2}{a^3}$ und Verwenden von

$$\frac{b^2}{a} = k = \frac{L^2}{\gamma\, m^2 M} \tag{4}$$

ergibt den vom Planeten unabhängigen Wert

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma\, M} \tag{5}$$

3 Lösung des exakten Zweikörperproblems

Wenn man die Masse des Planeten gegen die der Sonne nicht vernachlässigt, ändert sich nur wenig. Da in der Bewegungsgleichung jetzt die reduzierte Masse μ steht, während im Gravitationsgesetz weiterhin mM auftritt, muss man nur folgendes einsetzen: dort, wo m die reduzierte Masse vertritt, muss es auf jeden Fall durch μ ersetzt werden, aber nicht dort, wo es in der Gravitationskraft steht. Letzteres erkennt man aber eindeutig dadurch, dass es M als Faktor bei sich hat. Zu jedem M gehört also ein m, und das lässt sich erreichen, indem man in den oben gewonnenen Formeln die Ersetzungen

$$\text{zuerst } m \longrightarrow \mu \text{ und dann } M \longrightarrow Mm/\mu = M + m \tag{6}$$

durchführt. Z. B. muss das Ergebnis für das dritte Keplersche Gesetz

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{\gamma\, mM} \tag{7}$$

werden.

Die Sonne bewegt sich in diesem Falle natürlich auch, während der Schwerpunkt in Ruhe gehalten werden kann, am einfachsten über $\vec{R} = 0$. Durch die Relativkoordinate ausgedrückt sind dann die Positionen

$$\vec{r}_{Planet} = \frac{M}{m+M}\vec{r}, \quad \vec{r}_{Sonne} = -\frac{m}{m+M}\vec{r}. \tag{8}$$

Die Bahnkurven sind also nur durch das Massenverhältnis skaliert und die beiden Himmelskörper bewegen sich immer entgegengesetzt auf verschiedenen Seiten des Schwerpunkts.

4 Streuung im Gravitationsfeld und Wirkungsquerschnitt

Die Hyperbelbahnen bei positiver Energie beschreiben die Streuung von Himmelskörpern, die aus dem Unendlichen kommen und dorthin zurückkehren, im Schwerefeld der Sonne. In den Polarkoordinaten ist die Richtung der Asymptoten durch die Unendlichkeitsstelle von

$$\rho(\varphi) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos\varphi} \tag{9}$$

gegeben als

$$\varphi_\infty = \arccos(-1/\epsilon). \tag{10}$$

Der Streuwinkel ϑ hängt damit über

$$\vartheta = 2\varphi_\infty - \pi \tag{11}$$

zusammen.

Der Anfangszustand des Streuteilchens wird durch seine kinetische Energie im Unendlichen

$$E = \frac{m}{2} v_\infty^2 \tag{12}$$

und durch den *Stoßparameter* b (engl. *impact parameter*) charakterisiert, der wiederum den Drehimpuls

$$L = mbv_\infty = \sqrt{2mE}b \tag{13}$$

festlegt. Hier wurde für v_∞ Gleichung (12) eingesetzt. Um diese Größen mit dem Streuwinkel zu verbinden, bemerken wir zunächst die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin\frac{\vartheta}{2} &= \sin\left(\varphi_\infty - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi_\infty = \frac{1}{\epsilon} && (14) \\ \cot^2\frac{\vartheta}{2} &= \frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = \epsilon^2 - 1 && (15) \end{aligned}$$

und betrachten die Situation am Perihel ($\varphi = 0$). Dort ist:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{k}{1+\epsilon} && (16) \\ E = V_{\text{eff}}(\rho_0) &= \frac{L^2}{2m\rho_0^2} - \frac{\alpha}{\rho_0} = \frac{L^2}{2mk^2}(1+\epsilon)^2 - \frac{\alpha}{k}(1+\epsilon) && (17) \end{aligned}$$

Mit $k = \frac{L^2}{\alpha m}$ und der Beziehung (15) erhalten wir:

$$E = \frac{\alpha^2 m}{2L^2}(1+\epsilon)^2 - \frac{\alpha^2 m}{L^2}(1+\epsilon) = \frac{\alpha^2 m}{2L^2}(\epsilon^2 - 1) = \frac{\alpha^2 m}{2L^2}\cot^2\frac{\vartheta}{2} \tag{18}$$

Einsetzen von (13) in diese Energiebalance am Perihel führt auf

$$\tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{\gamma\, mM}{2bE} \tag{19}$$

Der *Wirkungsquerschnitt* (engl. *cross section*) beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen in ein bestimmtes Streuwinkelintervall $(\vartheta, \vartheta + \mathrm{d}\vartheta)$ gestreut wird, über die Fläche des Kreisringes $2\pi b \mathrm{d}b$ des zugehörigen Stoßparameterintervalls, das das Teilchen treffen muss. Auswerten mit der obigen Beziehung zwischen Stoßparameter und Streuwinkel ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\vartheta} \propto \frac{1}{\cos(\vartheta/2)\sin^3(\vartheta/2)} \tag{20}$$

Bekannter ist dieser *Rutherfordsche Streuquerschnitt* in der Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}. \tag{21}$$