18. Vorlesung Wintersemester

1 Energieübertrag auf das Target

Das Verhältnis der kinetischen Energie des Targets nach dem Stoß im Vergleich zur Energie des Projektils vor dem Stoß ist

$$\eta = \frac{\vec{p}_2'^2/2m_2}{\vec{p}_1^2/2m_1}. \tag{1}$$

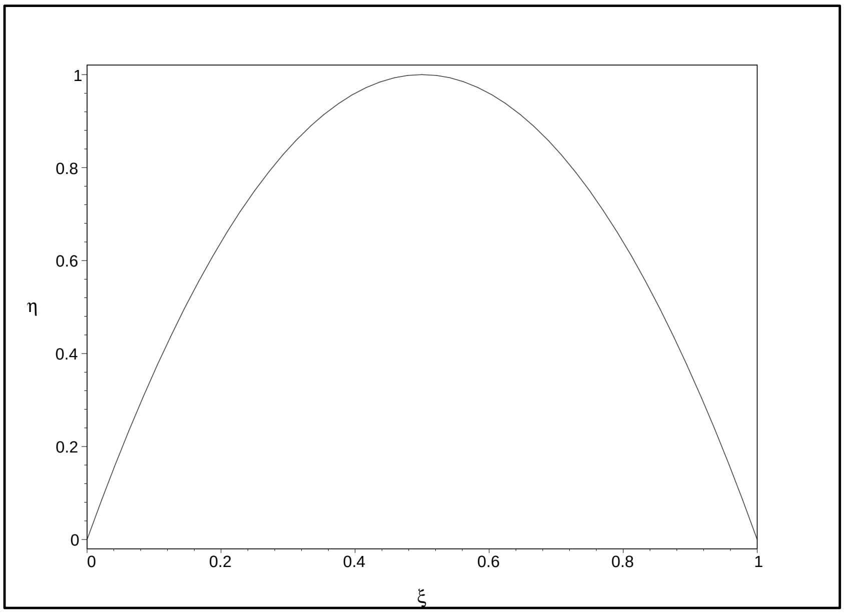
Mit Verwendung von

$$\vec{p}_2' = \frac{m_2}{M}\vec{p}_1 - \vec{q}_1', \quad q_1' = q_1 = \frac{m_2}{M}p_1, \quad \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1' = q_1^2 \cos\theta_S \tag{2}$$

erhält man daraus

$$\eta = \frac{2\mu}{M}\left(1 - \cos\theta_S\right). \tag{3}$$

Der maximale Energieübertrag oder, anders gesagt, das größte Abstoppen des Projektils, passiert also bei Rückwärtsstreuung mit $\theta_S = \pi$. In diesem Fall ist $\eta = 4\mu/M$. Bei fester Gesamtmasse lässt sich das als Funktion der Größe $\xi = m_1/M$ darstellen:



Man bekommt also das effektivste Stoppen für gleiche Massen. In diesem Fall bleibt ja sogar (s.o.) das Projektil stehen und das Target übernimmt die volle Geschwindigkeit.

2 Stoßgesetz für Billardkugeln

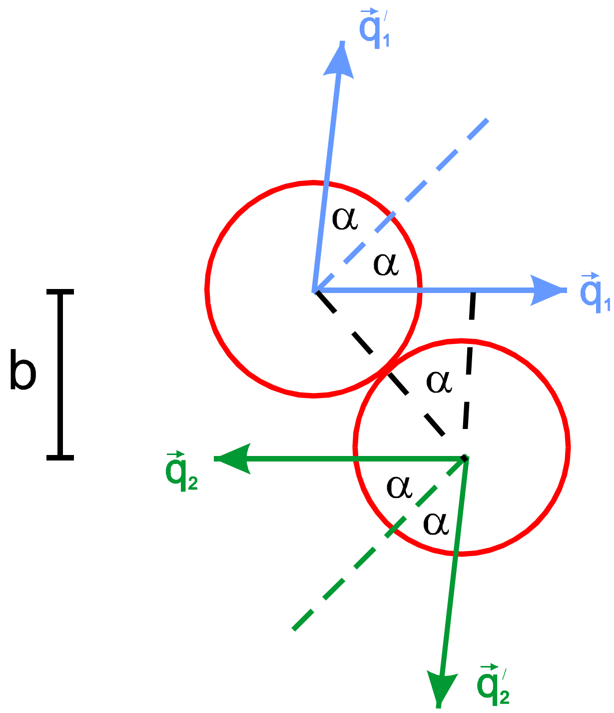
Beim Stoß zweier Billardkugeln wird die Impulskomponente der Teilchen in Richtung der Verbindungslinie umgeklappt. Dies folgt aus der Energieerhaltung beim elastischen Stoß und der Tatsache, dass nur Kräfte entlang der Verbindungslinie wirken. Aus dem Bild liest man ab

$$\theta_S = 2\alpha \text{ und } \cos\alpha = b/2R \tag{4}$$

mit R, dem Radius der Kugeln. Damit wird das Streugesetz zu

$$\theta_S = 2 \arccos \frac{b}{2R}. \tag{5}$$

Die physikalische Situation ist im folgenden Bild skizziert.



3 Mehrfachintegrale

3.1 Allgemeines

Integrale über Flächen oder Volumina können durch mehrfache Integration berechnet werden. Z. B. wird in kartesischen Koordinaten mit dem *Flächenelement* $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ein Integral über die Fläche S so berechnet:

$$\int_S f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \mathrm{d}x\, f(x,y) \tag{6}$$

Dabei geben die unteren und oberen Grenzen die Ränder der Fläche S in der jeweiligen Richtung an. Die Reihenfolge der Integrationen ist frei wählbar; meist ist aber eine bestimmte Reihenfolge vorteilhaft.

Beispiel: Der Flächeninhalt des Viertelkreises, der durch die Gleichung

$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad x = 0 \ldots R \tag{7}$$

gegeben ist, kann berechnet werden als

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^R \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^R \mathrm{d}x \sqrt{R^2 - x^2} \\
&= \left[\frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2}\right]_0^R \\
&= \frac{R^2\pi}{4}.
\end{aligned} \tag{8}
$$