19. Vorlesung Wintersemester

1 Mehrfachintegrale

1.1 Flächenelement in Polarkoordinaten

In Polarkoordinaten lautet das Flächenelement $\mathrm{d}F = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$, was der Fläche zwischen den Linien ρ und $\rho + \mathrm{d}\rho$ bzw. φ und $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ entspricht. Der Inhalt des Kreises wird dann viel einfacher

$$F = \int_0^R \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2. \tag{1}$$

Man beachte, dass das Integral sich einfach als Produkt der eindimensionalen Integrale schreiben lässt, wenn die Integrale voneinander unabhängig sind (also Integrand und Grenzen jeweils nicht von der anderen Variablen abhängen).

1.2 Volumenelement

Das Volumenelement wird mit $\mathrm{d}V$ oder $\mathrm{d}\tau$ oder meist mit d^3r bezeichnet. Im letzten Fall nimmt man statt r dann den Buchstaben des Vektors, über den integriert wird (das ist der Vorteil dieser Schreibweise: man kann auch die Integration über andere Vektoren wie z.B. Impulse so schreiben).

In den häufig verwendeten Koordinatensystemen wird

$$\mathrm{d}V = \begin{cases} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \text{kartesisch} \\ \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z & \text{zylindrisch} \\ r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi & \text{sphärisch} \end{cases} \tag{2}$$

2 Volumen einer Kugel

In dem häufig vorkommenden Fall, dass einige der Integrationen nicht von den anderen Integrationsvariablen abhängen, zerfällt das Mehrfachintegral in ein Produkt. So ist z. B. das Volumen der Kugel

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, r^2 \sin\vartheta \\ &= \left(\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\right) && (3) \\ &= \left(\frac{R^3}{3}\right)\cdot(2)\cdot(2\pi) && (4) \\ &= \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$