20. Vorlesung Wintersemester

1 Das Gravitationspotential einer ausgedehnten Massenverteilung

Für eine Massenverteilung, die durch die Dichte $\rho(\vec{r})$ beschrieben wird, ist die potentielle Energie einer Masse m am Beobachtungspunkt $\vec{r}$ durch Integration über alle Volumenelemente in der Massenverteilung zu berechnen:

$$V(\vec{r}) = -\int \mathrm{d}^3r' \frac{\gamma m \rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \tag{1}$$

Im Fall einer kugelsymmetrischen Massenverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ kann dies in Kugelkoordinaten weiter ausgewertet werden. Wegen der Symmetrie des Problems muss auch das Potential kugelsymmetrisch sein. Damit kann man die z-Achse in Richtung des Vektors $\vec{r}$ legen, so dass

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'} \tag{2}$$

wird. Das Integral ist somit

$$V(r) = -\gamma m \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^R r'^2 \mathrm{d}r' \int_0^\pi \sin\vartheta' \mathrm{d}\vartheta' \frac{\rho(r')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'}}. \tag{3}$$

Das letzte Integral hierin löst man mit Hilfe der Substution

$$s = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'}, \tag{4}$$

was zu

$$\int_0^\pi \sin\vartheta' \mathrm{d}\vartheta' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta'}} = \frac{1}{rr'} \int_{|r-r'|}^{r+r'} \mathrm{d}s = \frac{r + r' - |r - r'|}{rr'} \tag{5}$$

führt. Der Absolutbetrag für die untere Grenze kommt dadurch herein, dass s immer positiv sein muss. Deswegen muss man im Weiteren zwei Fälle unterscheiden:

$$\frac{r + r' - |r - r'|}{rr'} = \begin{cases} 2/r, & r > r' \\ 2/r', & r < r' \end{cases} \tag{6}$$

1.1 Potential außerhalb der Kugel

Wenn der Beobachtungspunkt außerhalb der Kugel liegt, so ist im gesamten Integrationsbereich $r > r'$, und

$$V(r) = -\gamma m \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^R r'^2 \mathrm{d}r' \frac{2\rho(r')}{r}. \tag{7}$$

Jetzt kann r vor das Integral gezogen werden, und die verbleibenden Integrationen zusammen mit dem Faktor 2, der die ϑ'-Integration vertritt, entsprechen einfach dem Volumenintegral der Dichte über die gesamte Massenverteilung, also der Gesamtmasse M. Es wird also

$$V(r) = -\frac{\gamma m M}{r} \tag{8}$$

Schon direkt ab der Oberfläche sieht also das Potential so aus, wie das einer Punktmasse im Ursprung!

1.2 Potential innerhalb der Massenverteilung

Im Inneren der Kugel muss das Integral über r' in zwei Beiträge zerlegt werden: für den Bereich $0 \dots r$ ist $r' < r$ und für $r \dots R$ andererseits $r' > r$. Das gesamte Integral wird also zu

$$V(r) = -4\pi\gamma m \int_0^r r'^2 \mathrm{d}r' \frac{\rho(r')}{r} - 4\pi\gamma m \int_r^R r'^2 \mathrm{d}r' \frac{\rho(r')}{r'} \tag{9}$$

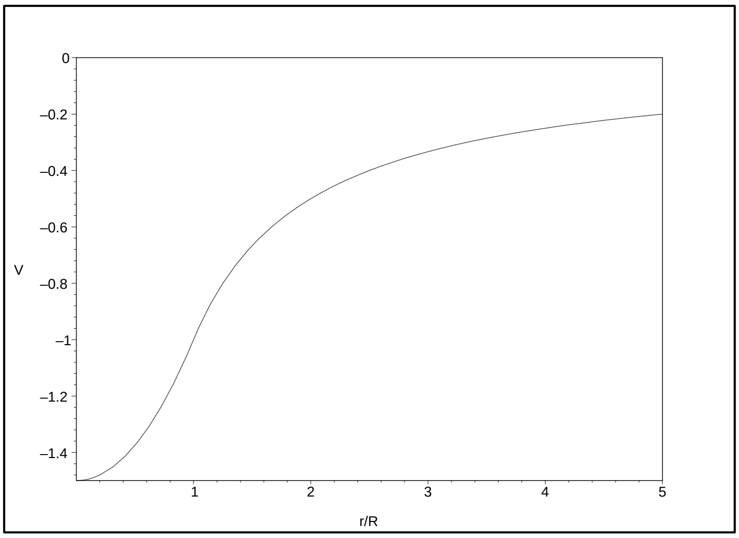
Der erste Beitrag beschreibt das Potential, das von der Gesamtmasse im Radiusbereich $0 \dots r$ erzeugt wird:

$$-\frac{\gamma m M(r)}{r} \text{ mit } M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 \mathrm{d}r' \tag{10}$$

Weiter auswerten lässt sich das für den Fall konstanter Dichte $\rho(r') = \rho_0$ mit $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$. In diesem Fall ist $M(r) = M \frac{r^3}{R^3}$ und das verbleibene Integral ist einfach zu berechnen. Zusammenfassen und Ersetzen der Dichte durch M und R ergibt schließlich

$$V(r) = \frac{\gamma m M}{R} \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} \right) . \tag{11}$$

Im Inneren der Kugel handelt es sich also um ein harmonisches Oszillatorpotential.



Das Bild zeigt das Potential in Einheiten von $\gamma m M/R$. Am Punkt $r/R = 1$ sind das Potential und seine erste Ableitung stetig, dagegen macht die zweite Ableitung einen Sprung.

2 Integrale über gekrümmte Flächen

Ein Flächenelement auf einer gekrümmten Oberfläche ist ein Vektor mit Richtung senkrecht zur Oberfläche. Für geschlossene Oberflächen wird konventionell die Richtung nach außen gewählt. Wenn die Oberfläche in Parameterdarstellung $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ gegeben ist, kann man das Oberflächenelement mit dem Vektorprodukt konstruieren. Man betrachtet an der Stelle

$\vec{r}(u,v)$ ein infinitesimales Parallelogramm, das von den drei Punkten $\vec{r}(u,v)$, $\vec{r}(u+\mathrm{d}u,v)$ und $\vec{r}(u,v+\mathrm{d}v)$ bestimmt wird. Seine Fläche ist

$$\mathrm{d}\vec{S} = \pm\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{12}$$

wobei das Vorzeichen je nach Situation ausgewählt werden muss. Das funktioniert, weil die Ableitungsvektoren tangential zur Fläche liegen, so dass das Vektorprodukt wie gewünscht senkrecht auf der Oberfläche steht.

Eine alternative Schreibweise ist $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S$, womit das Flächenelement in einen Betrag und den senkrecht zur Fläche stehenden *Normalenvektor* $\vec{n}$ aufgespalten wird. Diese Notation wird aber immer weniger verwendet.

Wenn die Fläche gekrümmt ist, hängt das Flächenelement natürlich von u und v ab.

Der *Flächeninhalt einer Oberfläche* S ist das zweidimensionale Integral

$$\int_S |\mathrm{d}\vec{S}|, \tag{13}$$

wobei die Integration über die Fläche s dadurch auszuführen ist, dass man über den passenden Wertebereich von u und v integriert.

Beispiel: das Flächenelement auf der Kugeloberfläche ist wegen der Parametrisierung

$$\vec{r}(\vartheta,\varphi) = R(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \tag{14}$$

gegeben durch

$$\mathrm{d}\vec{S} = R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r. \tag{15}$$

Die Oberfläche der Kugel wird somit

$$S = R^2\int_0^\pi \sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2. \tag{16}$$

3 Der Satz von Stokes

Es sei S eine Fläche im Raum und ∂S ihre geschlossene Randkurve. Dann gilt für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ der *Stokessche Satz*

$$\oint_{\partial S}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}. \tag{17}$$

Dabei muss die Richtung des Flächenelementes so gewählt werden, dass sie im mathematisch positiven Sinne zur Umlaufrichtung der Kurve passt.

Anwendung: für ein konservatives Kraftfeld ist wegen der Wegunabhängigkeit der Arbeit

$$\oint_{\partial S}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0 \tag{18}$$

für eine *beliebige* Fläche S mit zugehörigem Rand ∂S. Umformung nach dem Stokesschen Satz ergibt

$$\int_F(\nabla\times\vec{F})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{19}$$

für eine beliebige Fläche. Das kann nur gelten, wenn $\nabla\times\vec{F} = 0$ überall erfüllt ist.

4 Der Satz von Gauß

Der Satz von Gauß entspricht dem von Stokes eine Dimension höher. Jetzt geht es um ein begrenztes Volumen V und dessen Oberfläche ∂V. Für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt dann

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} \mathrm{d}V. \tag{20}$$

Nebenbemerkung: in der modernen Differentialgeometrie sind die Sätze von Stokes und Gauß nur Spezialfälle derselben Formel, die für beliebige Dimensionen gilt. Dazu braucht man nur passende Verallgemeinerungen von Rotation und Divergenz sowie der Differentiale auf höhere Dimensionen.