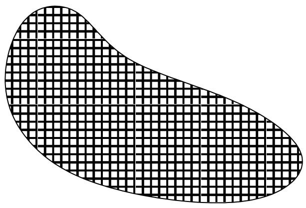
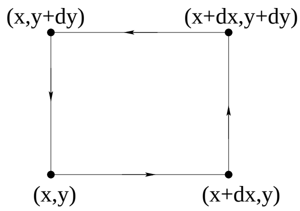
21. Vorlesung Wintersemester

1 Der Satz von Stokes

Im Folgenden zeigen wir den Satz von Stokes in der Ebene. Dazu zerlegen wir die Gesamtfläche S in infinitesimale kartesische Flächenelemente $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.





Das Wegintegral auf dem Rand eines kleinen Rechtecks über das Vektorfeld $\vec{A}$ ergibt mit Taylorentwicklung und linearer Näherung

$$\oint\limits_{\partial S_i} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = A_x(x,y)\mathrm{d}x + A_y(x+dx,y)\mathrm{d}y - A_x(x,y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x - A_y(x,y)\mathrm{d}y$$
$$\approx -\frac{\partial A_x}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \frac{\partial A_y}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\nabla\times\vec{A}\right)_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{S_i}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1}$$

Der Satz von Stokes gilt also für infinitesimale Flächenelemente. Man sieht leicht, dass für benachbarte Flächenelemente S_i und S_j gilt

$$\oint\limits_{\partial S_i} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \oint\limits_{\partial S_j} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint\limits_{\partial (S_i\cup S_j)} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{2}$$

Der Satz von Stokes ergibt sich daher aus der Addition der Gleichungen für alle Flächenelemente:

$$\oint_{\partial S} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \oint_{\partial S_i} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \int_{S_i}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{3}$$

2 Die Kontinuitätsgleichung

Wenn eine Flüssigkeit mit Dichte ρ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch das Flächenelement $\mathrm{d}\vec{S}$ strömt, so ist die Masse, die in der Zeit $\mathrm{d}t$ durch das Flächenelement strömt,

$$\mathrm{d}m = \rho\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\,dt \tag{4}$$

Es sei $\rho(\vec{r},t)$ eine Massenverteilung im Raum, die sich durch Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$ zeitlich neu verteilt, wobei aber nirgendwo Masse neu entsteht oder vernichtet wird. Dann gilt für ein beliebiges Volumen V mit Oberfläche $S(V)$, dass sich die Änderung der in V enthaltenen Gesamtmasse durch den Strom durch die gesamte Oberfläche ergeben muss:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3r = -\oint_{S(V)} \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{S} \tag{5}$$

Wenn das Volumen (damit ist nicht der Rauminhalt von V, sondern seine Form und Lage gemeint) zeitunabhängig ist, kann man links schreiben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3r = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3r. \tag{6}$$

Auf der rechten Seite benutzt man den *Gaußschen Satz*

$$\oint_{S(V)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}^3r \tag{7}$$

und erhält damit

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right)\mathrm{d}^3r = 0. \tag{8}$$

Da das Volumen beliebig ist, muss der Integrand selbst verschwinden und es resultiert die *Kontinuitätsgleichung*:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0. \tag{9}$$

Das ist jetzt eine Differentialgleichung, die kein beliebiges Volumen mehr enthält, sondern in lokaler Form gegeben ist.

Gleichungen von der Form der Kontinuitätsgleichung werden wir in der Physik immer wieder begegnen: sie treten immer dann auf, wenn "etwas" sich im Raum bewegen kann, aber die Gesamtmenge sich nicht ändert. In der Elektrodynamik gehorcht z. B. die Ladungsdichte einer Kontinuitätsgleichung.

3 Scheinkräfte

3.1 Bewegte Bezugssysteme ohne Rotation

Scheinkräfte sind ein typisches Phänomen in Nichtinertialsystemen. In der Tat erkennt man ja, dass man sich in einem Nichtinertialsystem befindet, daran, dass das erste Newtonsche Axiom nicht gilt, dass also ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, nicht in gleichförmiger Bewegung bleibt. Für den Beobachter in diesem System wirkt das so, als ob doch Kräfte wirken würden, eben *Scheinkräfte*, die nicht eine wirkliche physikalische Krafteinwirkung beschreiben, sondern darauf zurückzuführen sind, dass man ein "falsches" Koordinatensystem verwendet.

Sei Σ ein Inertialsystem und das System Σ' bewege sich relativ dazu mit der Verschiebung $\vec{s}(t)$ (die beiden Systeme sind aber gegeneinander nicht gedreht!). Für den Ortsvektor eines Punktteilchens gilt dann

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{s}(t), \tag{10}$$

und man errechnet für das zweite Newtonsche Axiom

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - m\ddot{\vec{s}}, \tag{11}$$

wobei der erste Term rechts die korrekt im Inertialsystem gesehene Kraft und der zweite die nur in Σ' spürbare Scheinkraft beschreibt:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + \vec{F}_s \text{ mit } \vec{F}_s = -m\ddot{\vec{s}}. \tag{12}$$

Eine typische Eigenschaft aller Scheinkräfte ist, dass sie zur Masse proportional sind. Diese Eigenschaft teilt mit ihnen wegen der Gleichheit von schwerer und träger Masse die Gravitationskraft, die in der allgemeinen Relativitätstheorie auch wie eine Scheinkraft beschrieben wird.

3.2 Rotierende Bezugssysteme

Der wichtigste Spezialfall für Scheinkräfte ist der, in dem Σ' nicht verschoben ist, aber gegenüber Σ mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert. Wenn wir die instantanen Einheitsvektoren in Σ' mit $\bar{\vec{e}}_j(t)$, $j = 1, \ldots 3$ bezeichnen, können wir einen Vektor $\vec{r}$ in Σ' zerlegen als

$$\vec{r} = \sum_j \bar{r}_j \bar{\vec{e}}_j. \tag{13}$$

In Σ' sind diese Einheitsvektoren konstant, und in diesem System ist die Zeitableitung des Vektors

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} \vec{r} = \sum_j \dot{\bar{r}}_j \bar{\vec{e}}_j. \tag{14}$$

Für den mitrotierenden Beobachter ist also ein konstanter Vektor einer, dessen Komponenten bezogen auf die Einheitsvektoren in Σ' sich nicht ändern.

Der Beobachter im Inertialsystem dagegen sieht, dass zusätzlich diese Einheitsvektoren rotieren. Für ihn ist die zeitliche Änderung des Vektors

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} \vec{r} = \sum_j \dot{\bar{r}}_j \bar{\vec{e}}_j + \sum_j \bar{r}_j \dot{\bar{\vec{e}}}_j. \tag{15}$$

Auch ein in Σ' konstanter Vektor ändert sich, und zwar gemäß dem zweiten Term.

Dieser zweite Term entspricht aber einfach einer Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, man kann ihn also auch ausdrücken als $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Damit bekommen wir

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} \vec{r} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{16}$$

Bei dieser Argumentation wurde nirgendwo benutzt, dass $\vec{r}$ speziell der Ortsvektor ist: jeder beliebige in Σ' feste Vektor rotiert ja in Σ. Demnach gilt für beliebige Vektoren $\vec{A}(t)$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} \vec{A} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} \vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{A}, \tag{17}$$

d. h. die gesamte zeitliche Änderung des Vektors im Inertialsystem setzt sich zusammen aus der im rotierenden System beobachteten und der durch die Rotation verursachten. Manchmal schreibt man dies auch als *Operatorgleichung*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times . \tag{18}$$

Nun können wir diese Argumentation auf das zweite Newtonsche Axiom anwenden. Für die Geschwindigkeit gilt zunächst

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} \vec{r} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \bar{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \tag{19}$$

Dabei ist $\bar{\vec{v}}$ die in Σ' gemessene Geschwindigkeit. Jetzt können wir die Ableitung noch einmal anwenden

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} \vec{v} \\ &= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega}\times \right) \left(\bar{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) \qquad (20) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\Sigma'} \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \bar{\vec{v}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}. \end{aligned}$$

Zu beachten ist die verschiedene Behandlung der Vektoren:

- $\vec{\omega}$ liegt in der Drehachse und rotiert nicht mit. Deswegen ist seine Zeitableitung $\dot{\vec{\omega}}$ in Σ' oder Σ gleich.
- $\vec{r}$ ist ebenfalls *derselbe* in beiden Systemen. Er hat zwar verschiedene Komponenten, je nachdem wie die Einheitsvektoren zueinander stehen, aber wenn man etwa $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ berechnet, so ist das Resultat wieder physikalisch in beiden Systemen gleich (hat nur wieder verschiedene Komponenten).
- Die Größen $\vec{v}$ und $\bar{\vec{v}}$ sind dagegen wirklich verschieden, wie man schon daran sieht, dass für einen Massenpunkt, für den $\bar{\vec{v}} = 0$ ist, im Inertialsystem $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ gilt.

Mit (20) und mit $m\vec{a} = \vec{F}$ erhalten wir für die in Σ' wirkenden Scheinkräfte

$$m \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\Sigma'} \vec{r} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \bar{\vec{v}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}. \qquad (21)$$

Hierin erkennen wir zwei sehr wichtige Beiträge, die *Corioliskraft*

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega} \times \bar{\vec{v}} \qquad (22)$$

und die *Zentrifugalkraft*

$$\vec{F}_{\text{Zentrifugal}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \qquad (23)$$

Die beiden Kräfte lassen sich gut unterscheiden: die Zentrifugalkraft wirkt auf alle Körper und ist immer radial von der Drehachse weg gerichtet. Vom Betrag ist sie $m\omega^2 r_\perp$ mit $r_\perp$ dem senkrechten Abstandes des Ortes $\vec{r}$ von der Drehachse. Die Corioliskraft dagegen wirkt nur auf sich bewegende Massenpunkte. Wenn man sich auf der Erdoberfläche bewegt, führt sie auf der Nordhalbkugel zu einer Rechtsablenkung und auf der Südhalbkugel zu einer Linksablenkung. Dies macht sich im Drehsinn von Tiefdruckgebieten bemerkbar. Die Behauptung, dass sich der Drehsinn des Wirbels im Waschbeckenabfluss damit erklären lässt, ist aber falsch.

Der dritte Beitrag in (21) ist nicht so interessant und hat keinen allgemein akzeptierten Namen; manche Bücher nennen ihn etwas abwegig "Linearbeschleunigung" (obwohl es sich ja gerade um eine Winkelbeschleunigung handelt).

4 Der Virialsatz

Der Virialsatz macht Aussagen über das Verhalten der Mittelwerte $\overline{T}$ und $\overline{V}$ von kinetischer und potentieller Energie. Z. B. ist für den harmonischen Oszillator $\overline{T} = \overline{V} = E/2$.

Der Mittelwert einer Funktion $f(t)$ über ein Intervall $(t, t + T_0)$ ist definiert als

$$\bar{f} = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} f(t')\, dt'$$

Eine alternative Schreibweise für $\bar{f}$ ist $\langle f \rangle$.

Bei periodischen Bewegungen kann man für T_0 die Periodendauer wählen; ansonsten betrachtet man den Grenzwert $T_0 \to \infty$. Konvergenz kann man nur erwarten, *wenn die Bewegung beschränkt bleibt*, also z. B. nicht bei Streuung.

4.1 Ableitung

Man multipliziert die Bewegungsgleichung

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \vec{F}_i \tag{24}$$

skalar mit $\vec{r}_i$ Unter Verwendung von

$$\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = m_i \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}_i \right) - m_i \vec{v}_i^2, \tag{25}$$

wird nach Summierung über alle Teilchen und Mittelwertbildung daraus

$$\left\langle \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}_i \right) \right\rangle - 2\overline{T} = \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle \tag{26}$$

T ist hier die gesamte kinetische Energie.

Bei *begrenzten Bewegungen* verschwindet der Mittelwert des ersten Terms und man erhält, wenn man noch konservative Kräfte annimmt, also $\vec{F}_i = -\nabla_i V$, den *Virialsatz*

$$2\overline{T} = \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \nabla_i V \right\rangle. \tag{27}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite heißt *Virial*.