22. Vorlesung Wintersemester

1 Der Virialsatz

1.1 Potentiale mit Potenzgesetz

Besonders nützlich ist der Virialsatz, wenn das Vielteilchenpotential aus Zweiteilchenbeiträgen mit Potenzgesetz besteht:

$$V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = \sum_{i<j} \alpha_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^k. \tag{1}$$

In diesem Fall wird das Virial zu

$$\left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \nabla_i V \right\rangle = k\overline{V}, \tag{2}$$

und der Virialsatz erhält die Form

$$2\overline{T} = k\overline{V}. \tag{3}$$

Die *Ableitung der Beziehung (2)* ist nicht ganz trivial. Zunächst schreibt man die Summe im Potential wieder symmetrisch:

$$V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^k. \tag{4}$$

Wenn man für das Virial nun den Operator $\sum_m \vec{r}_m \cdot \nabla_m$ daraus anwendet, erhält man zwei Beiträge, nämlich einmal für den Term in der Summe mit $i = m$ und einmal für $j = m$. Die beiden Beiträge sind:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i \cdot \nabla_i \sum_{\substack{j, \\ j \neq i}} \alpha_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^k &= \vec{r}_i \cdot \sum_{\substack{j, \\ j \neq i}} \alpha_{ij} \nabla_{\vec{r}_i - \vec{r}_j} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^k \\ &= \sum_{\substack{j, \\ j \neq i}} \vec{r}_i \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \alpha_{ij} k |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{k-1} \end{aligned}$$

($\nabla_{\vec{r}_i - \vec{r}_j}$ bedeutet die Ableitung nach $\vec{r}_i - \vec{r}_j$) sowie analog

$$\begin{aligned} \vec{r}_j \cdot \nabla_j \sum_{\substack{i, \\ i \neq j}} \alpha_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^k &= -\vec{r}_j \cdot \sum_{\substack{i, \\ i \neq j}} \alpha_{ij} \nabla_{\vec{r}_i - \vec{r}_j} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^k \\ &= -\sum_{\substack{i, \\ i \neq j}} \vec{r}_j \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \alpha_{ij} k |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{k-1}. \end{aligned}$$

Wenn nun die Summe über m berücksichtigt wird, wird daraus wieder eine Doppelsumme über i und j und mit Berücksichtigung des Vorzeichens addieren sich die Terme korrekt auf:

$$\sum_m \vec{r}_m \cdot \nabla_m V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \alpha_{ij} k |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{k-1} = kV. \tag{5}$$

1.2 Beispiele

1. Für das Potential des *harmonischen Oszillators* ist $k = 2$, und man erhält
$$\overline{T} = \overline{V}. \tag{6}$$
Dieses Ergebnis gilt für beliebig viele Teilchen, solange die Wechselwirkungspotentiale nur quadratisch vom Abstand abhängen.

2. Für das *Gravitationspotential* ist $k = -1$ und es wird
$$\overline{V} = -2\overline{T} \tag{7}$$
oder wegen $E = \overline{T} + \overline{V}$ erfüllt die Gesamtenergie
$$E = -\overline{T}. \tag{8}$$
Sie ist immer negativ, was wiederum dazu passt, das der Virialsatz nur für beschränkte, d. h. in diesem Fall gebundene, Systeme gilt.

1.3 Anwendungsbeispiel

Für stabile Sternenhaufen kann man mit Hilfe des Virialsatzes die Masse abschätzen. Aus der beobachteten Bewegung der Sterne ergibt sich eine grobe Schätzung der kinetischen Energie zu $T = \frac{M}{2}v^2$, während die potentielle Energie mit M^2/R gehen sollte, wobei der Radius des Sternhaufens ebenfalls messbar ist. Da die Wechselwirkung die Gravitation ist, kann man (7) benutzen, um die Masse abzuleiten.

Damit das Argument stimmt, muss der Sternhaufen stabil sein, also nicht gerade in einer Auflösungsbewegung. In der Anwendung findet man, dass die Masse wesentlich größer sein muss als die der Sterne im Haufen: ein Hinweis, dass *dunkle Materie* gebraucht wird, um die Stabilität der Sternhaufen zu erklären.

2 Drehungen in Matrizenschreibweise

Für allgemeine Eigenschaften von Matrizen siehe ein Mathematik-Nachschlagewerk.

Eine Drehung ist eine lineare Transformation, die zusätzlich die Eigenschaft hat, dass die Länge von Vektoren nicht verändert wird. Im zweidimensionalen lautet das in Matrixschreibweise
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{9}$$
mit der Bedingung
$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2, \tag{10}$$
die für die Zahlen in der Matrix auf die Bedingungen
$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0 \tag{11}$$
führt.

Durch diese drei Bedingungen bleibt noch ein freier Parameter in der Matrix, der mit dem Drehwinkel zusammenhängen muss. Alle Bedingungen können mit der Wahl
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{12}$$

erfüllt werden. Die jeweiligen Vorzeichen der einzelnen Matrixelemente ergeben sich aus der Betrachtung von konkreten Drehungen, z. B.

$$\varphi = 0 \qquad \Rightarrow \quad x' = x, \quad y' = y \qquad \Rightarrow \quad a = d = 1, \quad b = c = 0 \tag{13}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \quad x' = -y, \quad y' = x \qquad \Rightarrow \quad a = d = 0, \quad b = -1, \quad c = 1 \tag{14}$$

Der Parameter φ entspricht damit tatsächlich dem Drehwinkel, mit dem der Vektor gedreht wird.

Im dreidimensionalen Raum kann eine Drehung um die z-Achse durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

dargestellt werden. Für die anderen Achsen geht es analog: in den Zeilen und Spalten, die der Drehachse entsprechen, steht diagonal eine 1 und sonst Nullen.

Die Drehung um zwei Winkel nacheinander kann durch Multiplikation der Matrizen ausgeführt werden und führt auf die Drehmatrix mit der Summe der beiden Winkel, wobei gerade die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen in der Produktmatrix auftauchen.

3 Spezielle Relativitätstheorie

Die Transformation auf bewegte Bezugssysteme in der Newtonschen Physik, die Galileitransformation, steht im Widerspruch zur Elektrodynamik (den Maxwell-Gleichungen) und zum Experiment von Michelson und Morley, das nachweist, dass die Lichtgeschwindigkeit für alle Beobachter, unabhängig von ihrer eigenen Geschwindigkeit, dieselbe ist. Einsteins grundlegende Idee war, dass die Galilei-Transformation

$$x' = x - vt, \quad t' = t, \tag{16}$$

für ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes System Σ', in der die Addition der Geschwindigkeiten gilt, so dass das Licht in Σ' die Geschwindigkeit $c - v$ hätte, wenn es in Σ die übliche Lichtgeschwindigkeit c (in Richtung von v) hat, nur für kleine $v << c$ gilt. Im Allgemeinen muss man die Galilei-Transformation mit der für alle Beobachter gleichen Zeit durch eine Transformation ersetzen, in der auch die Zeit verändert wird.

Wenn die Lichtgeschwindigkeit in Σ und Σ' denselben Wert hat, muss für den Ort eines Lichtstrahls, der zur Zeit $t = 0$ vom Ursprung der Koordinatensysteme (der bei $t = 0$ derselbe Punkt ist) ausgesandt wird, die Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \tag{17}$$

gelten. Das sieht fast so aus wie die Bedingung bei Drehungen (10), außer dass das Vorzeichen des Zeitbeitrags anders ist. Wir werden sehen, dass man zur Konstruktion der Matrizen ähnlich vorgehen kann wie oben, wobei sich nur einige Einzelheiten ändern.

Wenn man neue Koordinaten im vierdimensionalen Raum (*Raumzeit, space-time, oder Minkowski-Raum*) gemäß

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict \tag{18}$$

einführt, lässt sich das als

$$\sum_{i=1}^{4} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \tag{19}$$

schreiben, sieht also formal aus wie die Bedingung für eine Rotation im vierdimensionalen Raum. Die Konstruktion der Drehmatrix kann also analog zum Fall gewöhnlicher Drehungen durchgeführt werden, wobei allerdings der imaginäre Charakter der Koordinate x_4 zu anderen Funktionen und zu einer anderen Interpretation des "Drehwinkels" führen wird.