23. Vorlesung Wintersemester

1 Die Lorentz-Transformation

Für den Fall einer Bewegung eines Koordinatensystems Σ' gegenüber Σ mit der Geschwindigkeit v in die $x_1 = x$-Richtung kann man das Problem nur in den beiden Koordinaten x_1 und x_4 behandeln und setzt wieder eine Matrix an:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Wegen

$$x_1'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_4^2 \tag{2}$$

müssen dann wieder die Bedingungen

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0 \tag{3}$$

erfüllt sein. Im jetzigen Fall muss man aber berücksichtigen, dass b und c imaginär sein müssen, damit x_1 und x_1' reell und x_4 und x_4' imaginär sind. Mit $b = iB$, $c = iC$ wird aus diesen Bedingungen

$$a^2 - C^2 = 1, \quad d^2 - B^2 = 1, \quad aB + Cd = 0 \tag{4}$$

Das lässt sich diesmal nicht mit trigonometrischen, sondern mit Hyperbelfunktionen erfüllen und führt auf den Ansatz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & i\sinh\alpha \\ -i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Die jeweiligen Vorzeichen der einzelnen Matrixelemente ergeben sich wieder aus der Betrachtung von Spezialfällen. Hierin ist α ein Parameter, ein verallgemeinerter Drehwinkel, der durch die Geschwindigkeit v gegeben sein muss.

Um ihn zu bestimmen, betrachtet man die Bewegung des Ursprunges von Σ' mit der Koordinate $x_1' = 0$. In Σ hat er die Koordinate

$$x_1 = vt = -i\beta x_4, \tag{6}$$

wobei die gebräuchliche relativistische Abkürzung

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{7}$$

benutzt wurde. Einsetzen in die Loretztransformation liefert

$$0 = x_1' = \cosh\alpha\, x_1 + i\sinh\alpha\, x_4 = x_4(-i\beta\cosh\alpha + i\sinh\alpha) \tag{8}$$

Damit das für alle Zeiten gilt, muss die Klammer verschwinden, was auf

$$\sinh\alpha = \beta\cosh\alpha \tag{9}$$

oder $\tanh\alpha = \beta$ führt. Die in der Transformationsmatrix auftretenden Terme kann man direkt ausdrücken über die Beziehung

$$1 - \tanh^2\alpha = \frac{1}{\cosh^2\alpha}, \tag{10}$$

womit

$$\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11}$$

und damit

$$\sinh\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{12}$$

erhalten wird. Wenn man die zweite häufige Abkürzung

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{13}$$

einführt, wird die Matrix für die Lorentztransformation zu

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ -i\beta & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

1.1 Traditionelle Form der Lorentztransformation

Wenn man zu den Koordinaten x und t zurückkehrt, erhält man für die Transformationsgleichungen in der traditionellen Form zunächst

$$x' = \gamma\,(x - vt) \tag{15}$$

bzw.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{16}$$

Das unterscheidet sich nur durch den Nenner von der Galileitransformation. Für alle in der gewohnten Umwelt auftretenden Geschwindigkeiten ist aber $\gamma \approx 1$, so dass die Galileitransformation sehr gut erfüllt wird.

Für die Zeitkoordinate ist

$$t' = \gamma(t - vx/c^2) \tag{17}$$

bzw.

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{18}$$

Für kleine Geschwindigkeiten bleibt also die Zeit praktisch unverändert.

1.2 Grenzgeschwindigkeit

Die Lorentztransformation wird problematisch für $|v| \geq c$, da die Ortskoordinate x_1 imaginär und die Zeitkoordinate x_4 reell werden, so dass keine Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit überschreiten darf (Ausnahme: Spekulation über "Tachyonen").

1.3 Die Umkehrtransformation

Die Transformation in der umgekehrten Richtung erhält man einfach, indem v durch $-v$ ersetzt wird. Sie wird also zu

$$x = \gamma\,(x' + vt') \tag{19}$$

bzw.

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2). \tag{20}$$

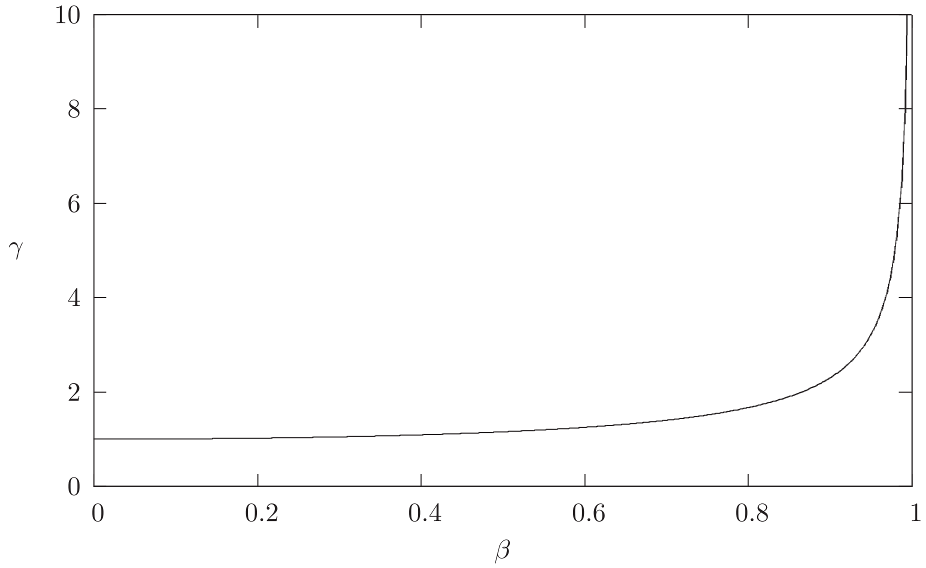

Abbildung 1: Der relativistische γ-Faktor

1.4 Transformationen als Gruppe

Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ$ auf dieser Menge, so dass

1. die Verknüpfung zweier Elemente A, B aus der Gruppe wieder ein Element der Gruppe ist: $A \circ B \in G$,
2. die Verknüpfung assoziativ ist, d.h. $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$,
3. ein Einselement ("Identität") $I \in G$ existiert, das alle Gruppenelemente unverändert lässt: $I \circ A = A \circ I = A$ und
4. jedes Element A aus der Gruppe ein Inverses A^{-1} hat, für das $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

In diesem Sinne bilden sowohl die Drehungen $D(\varphi)$ um den Winkel φ, als auch die Lorentztransformationen $T(\alpha)$ mit dem Parameter α Gruppen. Denn:

1. Mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische und Hyperbelfunktionen sieht man, dass $D(\varphi_1)D(\varphi_2) = D(\varphi_1+\varphi_2)$ und $T(\alpha_1)T(\alpha_2) = T(\alpha_1+\alpha_2)$ wieder Drehungen bzw. Lorentztransformationen sind.
2. Die Assoziativität bzgl. Hintereinanderausführung folgt aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation.
3. Die auch anschaulich offensichtlichen Einselemente sind $D(\varphi = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T(v = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Die zu $D(\varphi)$ inverse Drehung ist die Rückdrehung um denselben Winkel $D^{-1}(\varphi) = D(-\varphi)$. Wie gerade gesehen ist die Lorentzrücktransformation $T^{-1}(v) = T(-v)$.

1.5 Die Längenkontraktion

Ein Stab, der in Σ zwischen den Punkten x_1 und x_2 ruht, also mit der Länge $L = x_2 - x_1$, wird aus Σ' zum Zeitpunkt t' betrachtet. Die eben gegebene Umkehrtransformation liefert dann

$$L = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L' \tag{21}$$

oder

$$L' = \sqrt{1 - \beta^2}\, L. \tag{22}$$

Aus dem bewegten System beobachtet scheinen also alle Abstände verkürzt zu sein.

Natürlich gilt das auch umgekehrt: ein in Σ' ruhender Stab erscheint in Σ verkürzt. Die Ableitung läuft dann mit der Vorwärtstransformation, da in diesem Fall die Zeit t bei den Beobachtungen beider Endpunkte dieselbe sein muss.

1.6 Die Zeitdilatation

Wenn an einer festen Stelle x in Σ ein Zeitintervall $T = t_2 - t_1$ gemessen wird, so gilt für die Zeitkoordinaten in Σ' die Transformation

$$t'_{1,2} = \gamma(t_{1,2} - vx/c^2) \tag{23}$$

und bei Differenzbildung hebt sich der Ortsanteil wieder weg, so dass

$$T' = \gamma\, T \tag{24}$$

wird. Wegen $\gamma \geq 1$ bedeutet das, dass für den bewegten Beobachter die Zeit schneller vergeht.

Beispiel: Ein sich schnell bewegendes Elementarteilchen zerfällt in der Zeit τ, die in seinem Ruhesystem gemessen wird. Für den Beobachter im Labor vergeht inzwischen die längere Zeit $\gamma\tau$, d. h. das Teilchen scheint länger zu leben.

1.7 Addition der Geschwindigkeiten

Wenn man zwei Lorentz-Transformationen nacheinander für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 ausführt, werden die zugehörigen Matrizen multipliziert und die Additionstheoreme der Hyperbelfunktionen zeigen, dass dies einer Addition der Drehwinkel entspricht:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2. \tag{25}$$

Das Resultat ist also wieder eine Lorentztransformation, die der addierten Geschwindigkeit entspricht. Die zugehörige beobachtete Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$v = c \tanh(\alpha_1 + \alpha_2) = c\, \frac{\tanh \alpha_1 + \tanh \alpha_2}{1 + \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \tag{26}$$

Das ist die relativistische Addition der Geschwindigkeiten:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2} \tag{27}$$

Für kleine Geschwindigkeiten geht das in die einfache Addition ein, wie sie in der Newton'schen Physik richtig ist; wenn eine der beiden Geschwindigkeiten c ist, gilt $v = c$. Das bestätigt wieder die Rolle von c als Grenzgeschwindigkeit.