24. Vorlesung Wintersemester

1 Vierervektoren

Ein Punkt

$$(x, y, z, \mathrm{i}ct) = (\vec{r}, \mathrm{i}ct) \tag{1}$$

im Minkowski-Raum heißt *Ereignis* (engl.: *event*). Für einen solchen *Vierervektor* (engl.: *four-vector*) benutzt man meist einfache Buchstaben, ohne Unterscheidungskennzeichen wie bei normalen Vektoren,

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ mit } x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict. \tag{2}$$

Die zweifache Verwendung des Buchstabens x — einmal für die Komponente, dann für den gesamten Vektor — zeigt, dass man dann lieber mit den indizierten Komponenten arbeiten sollte. Andere Vierervektoren sind z. B. die Vierergeschwindigkeit und der Viererimpuls.

Vierervektoren transformieren sich zwischen zueinander bewegten Koordinatensystemen gemäß der Lorentz-Transformation. Dabei bleibt das vierdimensionale Skalarprodukt

$$x \cdot y = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu y_\mu \tag{3}$$

invariant, analog zum Skalarprodukt von Vektoren im dreidimensionalen Raum, das sich unter Drehungen nicht ändert.

Beispiel:

$$x^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu x_\mu = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \tag{4}$$

Alternative Schreibweise: vor allem in der relativistischen Quantenmechanik vermeidet man komplexe Vektoren und berücksichtigt das Minuszeichen im Skalarprodukt durch die Einführung *kovarianter* Vektoren (Index unten)

$$(x_\mu, \mu = 0 \ldots 3) = (ct, -x, -y, -z) \tag{5}$$

und *kontravarianter* Vektoren (Index oben)

$$(x^\mu, \mu = 0 \ldots 3) = (ct, x, y, z). \tag{6}$$

Der Index läuft dann von 0 bis 3 und das Skalarprodukt wird geschrieben als

$$x \cdot y = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu y^\mu. \tag{7}$$

Es erhält das entgegengesetzte Vorzeichen zu dem aus (3).

Wozu diese kompliziertere Darstellung? Das Problem ist, dass in der Quantenmechanik komplexe Größen vorkommen, die sich anders verhalten als Ort und Zeit, die eigentlich reelle Größen sind. Der Trick, mit dem Faktor i das negative Vorzeichen bei der Zeit im Skalarprodukt zu erzeugen, führt also zu Komplikationen. Außerdem ist die Verwendung von ko- und kontravarianten Komponenten in der höheren Physik bei nichtorthogonalen Koordinatensystemen vertraut.

2 Lichtkegel und Kausalität

Der Begriff der Kausalität muss in der speziellen Relativitätstheorie modifiziert werden. In der Newtonschen Physik kann ein Ereignis an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit schon infinitesimal später im gesamten Universum Wirkungen auslösen, da die Ausbreitung von Signalen und sogar Punktteilchen mit beliebiger Geschwindigkeit erfolgen kann. In der Relativitätstheorie ist dagegen die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch die Lichtgeschwindigkeit c begrenzt. Ein Ereignis am Ort $\vec{r} = 0$ zur Zeit $t = 0$ kann also nur Ereignisse beeinflussen, die $r^2 < c^2t^2$ mit $t > 0$ erfüllen; das ist das Innere des Vorwärtslichtkegels. Beeinflusst werden kann das Ereignis umgekehrt nur von solchen, die dieselbe Bedingung erfüllen, aber für $t < 0$, das Innere des Rückwärtslichtkegels. Das ist die *relativistische Formulierung der Kausalität*.

3 Die Eigenzeit

Wenn ein Punktteilchen sich auf der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ bewegt, entspricht dies im Minkowski-Raum einer *Weltlinie*, die man etwa als parametrisierte Kurve

$$(\vec{r}(s), \mathrm{i}c\,t(s)) = x(s) \tag{8}$$

schreiben kann. Wenn man infinitesimal der Weltlinie folgt,

$$\mathrm{d}x = (\mathrm{d}\vec{r}, \mathrm{i}c\,\mathrm{d}t) = (\vec{v}\,\mathrm{d}t, \mathrm{i}c\,\mathrm{d}t), \tag{9}$$

so ist der Ausdruck $\mathrm{d}x^2 = \sum_\mu \mathrm{d}x_\mu^2$ eine Invariante, also ein Skalar unter Lorentztransformationen. Speziell in dem Koordinatensystem, in dem das Teilchen momentan ruht, ist aber $\mathrm{d}\vec{r} = 0$ und $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ mit τ der *Eigenzeit* (engl.: *proper time*) des Teilchens, d. h. der Zeit die für einen mit dem Teilchen mitbewegten Beobachter vergeht. Im Vergleich zu einem beliebigen System muss also gelten:

$$v^2\,\mathrm{d}t^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2 = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2, \tag{10}$$

und somit kann die Eigenzeit aus

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{11}$$

berechnet werden.

4 Vierergeschwindigkeit und -impuls

Die relativistische Geschwindigkeit sollte ein Vierervektor sein. Der Ausdruck analog zur Newtonschen Geschwindigkeit, in dem einfach die Position in der Raumzeit nach der Zeit differenziert wird,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{*** falsch! ***} \tag{12}$$

funktioniert aber nicht, weil sich zwar der Zähler als Vierervektor transformiert, aber die Koordinatenzeit unter Lorentztransformationen sich ebenfalls ändert, so dass dieser Ausdruck insgesamt ein sehr kompliziertes Verhalten hat. Man muss also stattdessen die *Vierergeschwindigkeit* in der Form

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \tag{13}$$

definieren. Mit der Definition von τ kann man das umschreiben als

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \mathrm{i}c \right). \tag{14}$$

Der Raumanteil in den Klammern rechts ist einfach die gewöhnliche Newtonsche Geschwindigkeit, die Komponenten sind also

$$u = \gamma(\vec{v}, \mathrm{i}c), \tag{15}$$

und sie erfüllt die wichtige Bedingung

$$u^2 = \sum_{\mu=1}^{4} u_\mu^2 = \gamma^2(v^2 - c^2) = -c^2. \tag{16}$$

Die Vierergeschwindigkeit ist also ein Vektor mit konstanter relativistischer "Länge". Anschaulich attraktiv ist, dass für ein ruhendes Teilchen die Vierergeschwindigkeit zu $(\vec{0}, ic)$ wird: das Teilchen "bewegt" sich also im Minkowski-Raum mit Lichtgeschwindigkeit in die Zukunft!

Die konsequente Definition für den relativistischen Impuls ist entsprechend

$$p = mu \tag{17}$$

mit der *Ruhemasse* m. In Komponenten bedeutet das

$$p = \gamma(m\vec{v}, \mathrm{i}mc). \tag{18}$$

Die Bedeutung der Zeitkomponente wird später klar werden.

Nebenbemerkung: in älteren Büchern wird manchmal eine geschwindigkeitsabhängige "bewegte Masse"

$$m' = \gamma m \tag{19}$$

eingeführt, so dass die Ortskomponenten des Impulses wie in der Newtonschen Mechanik zu

$$\vec{p} = m'\vec{v} \tag{20}$$

werden. Für die bewegte Masse wird dann einfach das Symbol m verwendet, während die Ruhemasse mit m_0 bezeichnet wird. Heute ist das nicht mehr üblich und nur die Ruhemasse wird verwendet (deren Name geht aber auf diese Definitionen zurück). Der Effekt, dass ein schnell bewegtes Teilchen mit größerer Trägheit reagiert, ist aber durchaus real.

Man beachte, dass die räumlichen Komponenten von Vierergeschwindigkeit und -impuls für kleine v in die Newtonschen Ausdrücke übergehen, da dann $\gamma \approx 1$ gilt.

5 Relativistische Mechanik

Bei der Konstruktion einer relativistischen Mechanik (und überhaupt, wenn man für neue Bereiche der Physik Gleichungen aufstellen will), sind drei Überlegungen wichtig:

1. Einhalten der mathematischen Anforderungen für eine konsistente Theorie. In unserem Falle bedeutet das, dass die Gleichungen in allen Lorentz-Systemen die gleiche Form haben sollten, d. h. sie sollten sich unter Lorentz-Transformationen eindeutig transformieren. Eine Gleichung der Art "Skalar = Skalar" oder "Vierervektor = Vierervektor" ist sinnvoll, während "Skalar = Vierervektor" nicht benutzt werden darf. Diese Eigenschaft der Gleichungen heisst *Kovarianz*.

2. Wenn es Bereiche gibt, in denen die bisherige Physik mit sehr guter Genauigkeit weiterhin ihre Gültigkeit behält, dann muss die neue Theorie im entsprechenden Grenzfall die alten Ergebnisse liefern (Korrespondenzprinzip). In unserem Fall: für Geschwindigkeiten $v \ll c$ sollten die Ergebnisse der Newtonschen Physik weiterhin gelten.

3. In vielen Fällen, wenn man die Wahl zwischen verschiedenen Formulierungen hat, kann es hilfreich sein, die *einfachste* Möglichkeit zu wählen. Das war in der Geschichte der Physik oft erfolgreich, aber es gibt natürlich keine Garantie, dass die Natur immer die einfachste Formel wählt — außerdem hängt das, was man für einfach hält, vom Stand der Mathematik ab!