25. Vorlesung Wintersemester

1 Die Bewegungsgleichung

Die Ähnlichkeit mit der Newtonschen Theorie zusammen mit den Invarianzforderungen legt die allgemeine Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p = K \tag{1}$$

nahe, wobei die Viererkraft

$$K = (\vec{K}, K_4) \tag{2}$$

irgendwie mit der Newtonschen Kraft zusammenhängen muss.

Wenn man die Differentiation nach der Eigenzeit durch die nach der Koordinatenzeit ersetzt, ist es natürlich, den dann auf der rechten Seite in den Ortskomponenten auftauchenden Term mit der Newtonschen Kraft zu identifizieren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = \sqrt{1-\beta^2}\, K \tag{3}$$

führt auf

$$\vec{F} = \sqrt{1-\beta^2}\, \vec{K}. \tag{4}$$

Die vierte Komponente der Viererkraft ist nicht unabhängig wählbar, was aus der Konstanz von u^2 folgt:

$$u \cdot K = \sum_\mu u_\mu K_\mu = \sum_\mu u_\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m u_\mu) = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sum_\mu u_\mu^2\right) = 0 \tag{5}$$

Die linke Seite lässt sich in dreidimensionale Form umschreiben, und man erhält mit Einsetzen von $u = \gamma(\vec{v}, ic)$ und (2)

$$\gamma^2 \vec{F} \cdot \vec{v} + \mathrm{i}\gamma c K_4 = 0. \tag{6}$$

oder

$$K_4 = \frac{\mathrm{i}}{c}\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{7}$$

Damit wird die vierte Komponente der Bewegungsgleichung zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m c^2) = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{8}$$

= Leistung, die die Kraft an dem Teilchen leistet. Die Energie des Teilchens sollte also durch den Ausdruck

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{9}$$

und die vierte Komponente des Viererimpulses durch

$$p_4 = \mathrm{i}E/c \tag{10}$$

gegeben sein.

2 Ruheenergie

Überraschenderweise ist für das ruhende Teilchen die Energie nicht Null, sondern die *Ruheenergie* nach der berühmten Einsteinschen Beziehung

$$E = mc^2. \tag{11}$$

3 Interpretation der Ruheenergie

Die Gleichung $E = mc^2$ bedeutet, dass der Masse eine Energie entspricht. Experimentell wird das deutlich im Phänomen der *Paarerzeugung*, bei der aus einer elektromagnetischen Welle (Gammaquant) z. B. ein Elektron und ein Positron erzeugt werden, die dieselbe Masse m besitzen. Zu diesem Prozess muss die Strahlung mindestens die Energie $2mc^2$ mitbringen. Bei der Vernichtung der beiden Teilchen wird diese Energie wieder frei.

Umgekehrt entspricht auch dem, was man gewöhnlich Energie nennt, eine Masse. Das ist messbar bei Atomkernen, bei denen die Gesamtmasse die Summe der Massen der Einzelteilchen ist, minus dem Betrag E_B/c^2 mit E_B der Bindungsenergie. Ebenso trägt die kinetische Energie der Wärmebewegung von Teilchen in einem Gas zur Masse bei.

Man kann also konstatieren, dass "Masse" und "Energie" zwei Ausdrucksformen derselben Größe sind: die *Äquivalenz von Masse und Energie*.

Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie sieht man sogar, dass die Bindungs- und kinetische Energie auch genauso zur schweren Masse, also zur Erzeugung des Gravitationsfeldes beiträgt.

4 Newtonscher Grenzfall der Energie

Für $v \ll c$ kann man entwickeln

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + \dots \tag{12}$$

Es kommt also zur Ruheenergie als erste Korrektur die Newtonsche kinetische Energie hinzu. Die Ruheenergie ist in der Newtonschen Physik nicht sichtbar, weil sie ein konstanter Beitrag ist.

5 Beispiel: konstante Kraft

Wir betrachten ein Teilchen, auf das in x-Richtung eine konstante Kraft mg wirkt. Die Bewegungsgleichung wird dann eindimensional und nimmt die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m v) = mg \tag{13}$$

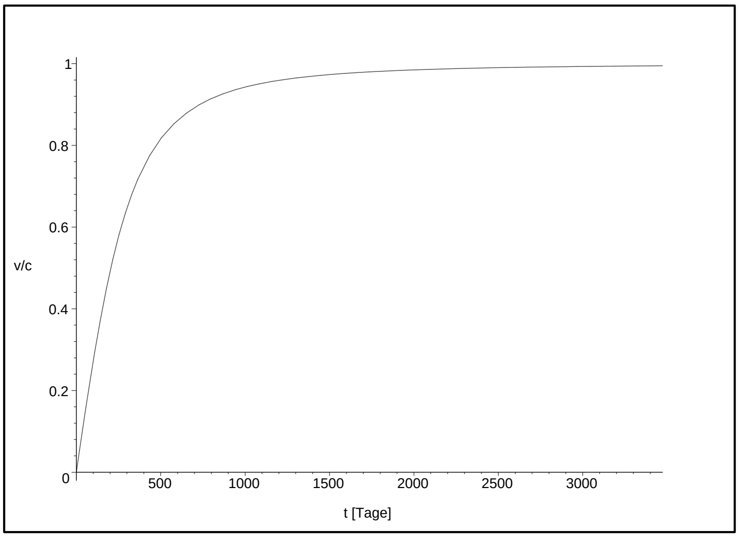
an. Anfangsbedingung sei $x(0) = 0$, $v(0) = 0$. Einmal Integrieren ergibt

$$\gamma v = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = gt \tag{14}$$

und mit Auflösen nach v:

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2t^2/c^2}} \tag{15}$$

Für kleine Zeiten nähert sich das gt, also der Newtonschen Lösung, für größere aber der Lichtgeschwindigkeit.



Das Bild zeigt die Geschwindigkeit berechnet mit den richtigen Zahlen. Ein Raumschiff, das so beschleunigt, dass die Astronauten konstant die Erdbeschleunigung spüren, erreicht also nach 472 Tagen 4/5 der Lichtgeschwindigkeit.

6 Beispiel: Schwerionenkollision

Ein Urankern mit der Energie 200 GeV pro Nukleon trifft auf einen ruhenden. Die Ruhemasse m eines Nukleons entspricht ca. 1 GeV. Damit wird die Gesamtenergie eines Nukleons

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 201\,\mathrm{GeV}. \tag{16}$$

Daraus errechnet sich eine Geschwindigkeit von $v \approx 0.99975c$ und $\gamma = 201$. Im Labor erscheint der Kern also in Bewegungsrichtung auf ein 201'tel seines Durchmessers kontrahiert.

In einem System, in dem beide Kerne mit derselben Geschwindigkeit v_s aufeinander zufliegen, sind die Verhältnisse weniger extrem. Die relativistische Addition der Geschwindigkeiten verlangt

$$v = \frac{2v_s}{1 + v_s^2/c^2}, \tag{17}$$

woraus man

$$\frac{v_s}{c} = \frac{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v/c} \approx 0.993 \tag{18}$$

und einen Faktor $\gamma \approx 8.46$ berechnet. Die Kerne erscheinen also in diesem System immer noch fast um einen Faktor 10 kontrahiert.

7 Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

Wir berechnen den Wert des Lorentz-invarianten Skalarprodukts

$$p^2 = \left(\vec{p}, i\frac{E}{c}\right)^2 = \vec{p}^{\,2} - \frac{E^2}{c^2} \tag{19}$$

über die Definition des Viererimpulses:

$$p = mu \quad \Rightarrow \quad p^2 = m^2u^2 = -m^2c^2 \tag{20}$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir die *relativistische Energie-Impuls-Beziehung*

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4 \tag{21}$$

Die Entsprechung aus der klassischen Mechanik,

$$E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V \tag{22}$$

ist die Näherung der relativistischen Beziehung unter Vernachlässigung der Ruheenergie mc^2 und Einbeziehung eines Potentials V.

Die mathematisch zulässigen negativen Lösungen von Gleichung (21) wurden im Rahmen der Quantentheorie von Paul Dirac als Antiteilchen interpretiert und schließlich auch experimentell nachgewiesen.