27. Vorlesung Wintersemester

1 Nichtlineare Dynamik: Allgemeines

Eine wichtige neue Erkenntnis zur klassischen Mechanik, die erst durch die Verwendung von Computern möglich war, ist die verblüffende Komplexität der Lösungen selbst von relativ einfachen Bewegungsgleichungen. Hier soll das am Verhalten des erzwungenen nichtlinearen Pendels demonstriert werden. Die mathematische Analyse seines Verhaltens ist zwar schwierig, aber Computerdemonstrationen erlauben es, auch ohne den vollen Hintergrund einiges kennenzulernen.

Die nichtlineare Mechanik hat zu der Einsicht geführt, dass chaotisches Verhalten nur möglich ist, wenn ein System

1. mindestens durch drei Zustandvariable charakterisiert ist, und
2. nichtlineare Kopplungen in den Bewegungsgleichungen enthält.

Grob gesagt braucht man nichtlineare Kopplungen, weil lineare Differentialgleichungen, wie wir gesehen haben, im wesentlichen Lösungen haben, die aus periodischen bzw. exponentiell an- oder absteigenden Anteilen bestehen.

Der Begriff der Zustandvariablen taucht auf, wenn man die Bewegungsgleichungen alle als Differentialgleichungen erster Ordnung schreibt. Für die Newtonsche Bewegungsgleichung z. B. wird so aus $\ddot{x} = F/m$ das gekoppelte System

$$\dot{v} = F/m, \quad \dot{x} = v, \tag{1}$$

also zwei gekoppelte Differentialgleichungen für die beiden Variablen x und v. Diese sind die *Zustandsvariablen*, weil man ja beide kennen muss, um die Zukunft des Systems berechnen zu können.

2 Der Phasenraum

Um die volle Information über die Bewegung eines Punktteilchens wiederzugeben, ist es damit nützlich, den *Phasenraum* (engl. *phase space*) einzuführen. Er hat die Koordinaten (x, v) — in der klassischen Mechanik wird meist stattdessen (x, p) verwendet. Die Bewegung des Teilchens äußert sich dann in der *Phasenraumtrajektorie* $(x(t), v(t))$, die also nicht nur die Bahnkurve, sondern auch die Geschwindigkeit der Bewegung aufträgt.

Beispiel: für den ungedämpften harmonischen Oszillator sind die Phasenraumtrajektorien i. A. Ellipsen (meist macht man daraus Kreise, indem die Achsen passend skaliert werden), und für den gedämpften Oszillator Spiralen, die zum Ursprung hinlaufen.

Eine wichtige Eigenschaft der Phasenraumtrajektorien ist, dass sie sich nicht schneiden dürfen. Der Grund ist einfach, dass die Gleichungen mit Anfangsbedingung $(x(0), v(0))$ eine eindeutige Lösung haben, also müssen zwei Trajektorien, die einen Punkt gemeinsam haben, zusammenfallen. Bei einem zweidimensionalen Phasenraum wird dadurch die Form der Trajektorien so sehr eingeschränkt, dass Chaos nicht möglich ist.

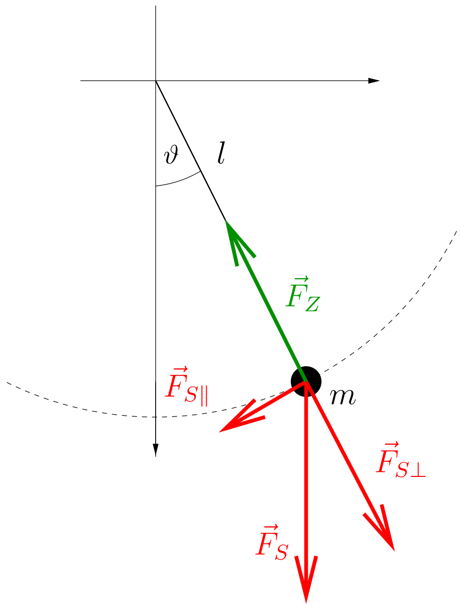
Wenn ein System durch mehr Zustandsgrößen x_i, $i = 1 \dots n$ bestimmt wird, hat man die allgemeine Formulierung

$$\dot{x}_i = F_i(x_1 \dots x_n), \quad i = 1 \dots n. \tag{2}$$

Man beachte, dass die Zeit auf der rechten Seite auch nicht explizit auftreten darf. Wenn sie vorkäme, dann könnte derselbe Punkt im Phasenraum zu verschiedenen Trajektorien führen, je nachdem, zu welcher Zeit er erreicht würde.

3 Das Fadenpendel

Beim mathematischen Pendel ist eine Punktmasse m über einen masselosen Faden der Länge l an einem Aufhängepunkt befestigt.



Wegen $r = l =$ const. formuliert man die Bewegungsgleichungen am besten in Polarkoordinaten (r, ϑ):

$$\vec{r} = l\vec{e}_r \tag{3}$$
$$\dot{\vec{r}} = l\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta \tag{4}$$
$$\ddot{\vec{r}} = l\ddot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta - l\dot{\vartheta}^2\vec{e}_r \tag{5}$$

Der zweite Summand in der Beschleunigung entspricht der Zentripetalbeschleunigung durch die Zugkraft $(\vec{F}_Z)$, die die Bewegung auf einem Kreis hält und dabei auch die Komponente der Schwerkraft senkrecht zum Kreisbogen $(\vec{F}_{S\perp})$ aufhebt. In tangentialer Richtung beschleunigend wirkt nur der Schwerkraftsanteil parallel zur Kreislinie $(\vec{F}_{S\parallel})$. Mit $\vec{F}_{S\parallel} = -mg\sin\vartheta\vec{e}_\vartheta$ erhalten wir die Bewegungsgleichung für den Auslenkwinkel ϑ:

$$ml\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0 \tag{6}$$

Für Schwingungen mit kleinen Winkeln ist $\sin\vartheta \approx \vartheta$, und es liegt ein harmonischer Oszillator mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ vor.

In jedem Fall sind ϑ und $\dot{\vartheta} = \omega$ geeignete Zustandsvariable für die Bewegung mit den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \omega \qquad (7) \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l}\sin\vartheta \qquad (8) \end{aligned}$$

Da der Phasenraum hier 2-dimensional ist, ist keine chaotische Bewegung möglich.

4 Bewegungsgleichungen für das erzwungene Pendel

Ein Pendel mit Reibung und anregender Kraft (periodisch mit fester Frequenz) hat in der vertrauten Formulierung die Bewegungsgleichung

$$ml\ddot{\vartheta} + \gamma\dot{\vartheta} + mg\sin\vartheta = A\cos(\omega_D t). \qquad (9)$$

Um das in ein System gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung umzuschreiben, definieren wir

$$\omega = \dot{\vartheta}, \quad \omega_D = \dot{\varphi} \qquad (10)$$

Die Einführung des Winkels φ, der trivial von der Zeit abhängt:

$$\varphi = \omega_D t, \qquad (11)$$

hat den Zweck, die Zeit nicht mehr explizit in den Bewegungsgleichungen auftreten zu haben. Das führt zu einem *dreidimensionalen Phasenraum.*

Man kommt also auf die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega, \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega}{q} - \sin\vartheta + f\cos\varphi, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega_D. \qquad (12)$$

Da wir hier nur am mathematischen Problem interessiert sind, wurden die frei wählbaren Koeffizienten mit $q = \frac{ml}{\gamma}$ und $f = \frac{A}{ml}$ zusammengefasst und die Zeiteinheit so gewählt, dass $g/l = 1$ wird.

5 Attraktoren

Im Falle des gedämpften Pendels ohne anregende Kraft ist klar, dass die Trajektorien im allgemeinen in den Ursprung des Phasenraumes hineinspiralen werden, weil sowohl Auslenkung als auch Winkelgeschwindigkeit exponentiell abklingen. Dieser Punkt "zieht" also die Trajektorien in sich hinein; er ist ein *Attraktor.*

Im Allgemeinen ist ein Attraktor ein Punkt $\vec{x}$ im Phasenraum, in dem alle Zeitableitungen verschwinden, d. h. nach den Bewegungsgleichungen

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0. \qquad (13)$$

Wenn das System sich in diesem Punkt befindet, dann bleibt es also dort.

Speziell für das Pendel ohne äußere Kraft sind die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \omega, \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega}{q} - \sin\vartheta. \qquad (14)$$

Für einen Attraktor gilt also

$$\omega = 0, \quad \sin\vartheta = 0. \qquad (15)$$

Da der Auslenkwinkel im Intervall $(-\pi, +\pi]$ liegt und sich dann periodisch wiederholt, gibt es zwei Lösungen:

1. Der Punkt $\omega = 0$, $\vartheta = 0$. Das entspricht der Ruhelage des Pendels, also dem intuitiv naheliegenden Attraktor.

2. Der Punkt $\omega = 0$, $\vartheta = \pi$. Die physikalische Situation ist die, dass das Pendel im höchsten Punkt "auf dem Kopf" steht. Offensichtlich ist diese Konfiguration instabil: jede kleine Störung wird es hinunterschwingen lassen.

6 Stabilitätsanalyse

Um die Stabilität mathematisch zu untersuchen, benutzen wir ein Verfahren, das immer wieder nützlich sein wird: die *Linearisierung* um den Ruhepunkt herum. Im Prinzip entspricht das der Näherung mit einer linearen Kraft nach dem Hooke'schen Gesetz, und je nach Vorzeichen der Kraft bekommt man exponentiell fallende oder anwachsende Lösungen, also Stabilität oder Instabilität.

In der Nähe des Attraktors bei $\omega = 0$, $\vartheta = 0$ kann man den Sinus als $\sin\vartheta \approx \vartheta$ nähern, und die Bewegungsgleichung wird damit

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} - \vartheta, \tag{16}$$

(jetzt wieder als Differentialgleichung 2. Ordnung geschrieben, um an den harmonischen Oszillator zu erinnern). Hierin sind die Vorzeichen so, wie es für einen gedämpften Oszillator sein sollte, d. h. die Lösungen fallen mit der Zeit exponentiell in den Attraktor zurück.

Anders ist es für den Attraktor bei $\omega = 0$, $\vartheta = \pi$. Wenn man aus diesem Punkt im Phasenraum auslenkt zu

$$(\omega,\ \pi + \Delta\vartheta), \tag{17}$$

so kann der Sinus genähert werden als

$$\sin\vartheta = \sin(\pi + \Delta\vartheta) \approx -\Delta\vartheta \tag{18}$$

(man betrachte den Graphen der Funktion an dieser Stelle). Damit wird die Bewegungsgleichung zu

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta\vartheta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}\,\Delta\vartheta}{\mathrm{d}t} + \Delta\vartheta. \tag{19}$$

Mit dem vertrauten Ansatz

$$\Delta\vartheta(t) = Ae^{\alpha t} \tag{20}$$

erhält man die Bestimmungsgleichung

$$\alpha^2 + \alpha/q - 1 = 0 \tag{21}$$

mit den beiden Lösungen

$$\alpha_\pm = -\frac{1}{2q} \pm \sqrt{\frac{1}{4q^2} + 1}. \tag{22}$$

Offensichtlich sind beide Werte reell, und zwar $\alpha_- < 0$ und $\alpha_+ > 0$. Man bekommt also eine exponentiell ansteigende, instabile Lösung, die vom Attraktor wegführt und wohl in den anderen Attraktor übergeht, und eine abklingende, die genau in diesem Attraktor zur Ruhe kommt. Letzteres ist die in der Praxis völlig unerreichbare Situation, dass das Pendel genau so angestoßen wird, dass es nach oben schwingt und durch die Reibung exakt im höchsten Punkt zur Ruhe kommt.

Das Zusammenspiel der beiden Lösungen sieht man wie folgt: die allgemeine Lösung ist

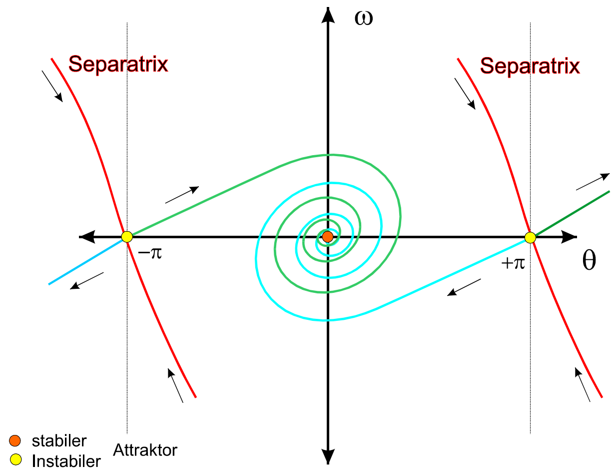
$$\Delta\vartheta(t) = A_+e^{\alpha_+ t} + A_-e^{\alpha_- t},\ \omega(t) = \alpha_+A_+e^{\alpha_+ t} + \alpha_-A_-e^{\alpha_- t} \tag{23}$$

Wenn die Anfangsbedingung nicht so aussieht, dass $A_+ = 0$ exakt erfüllt ist, wird nach einiger Zeit immer dieser exponentiell ansteigende Beitrag dominieren und die Trajektorie sich von diesem Attraktor weg dem anderen zuwenden. Nur für $A_+ = 0$ läuft die Trajektorie entlang der Geraden

$$\omega = \alpha_- \Delta\vartheta \tag{24}$$

geradewegs in den Attraktor, wie man sofort aus der Lösung sieht. Diese Gerade spielt die Rolle einer *Separatrix*. Die Trajektorien auf ihren beiden Seiten laufen jeweils in einen anderen Attraktor hinein.

Da bei dieser Analyse die lineare Näherung benutzt wurde, ist die Separatrix nur in der Nähe des Atrraktors annähernd eine Gerade. Weiter entfernt wird sie durch nichtlineare Effekte davon abweichen



Das Bild zeigt einen Überblick über die Phasenraumstruktur (die eingezeichneten Trajektorien sind keine Lösungen der Bewegungsgleichungen, sondern freihand gemalt). Die Pfeile an den Trajektorien zeigen die Richtung der Bewegung. Zu beachten ist, dass sich alles im Winkel periodisch wiederholt; z. B. sind die links und rechts eingezeichneten Separatrices in Wirklichkeit dieselbe Kurve.