28. Vorlesung Wintersemester

1 Volumenerhaltung im Phasenraum

Man betrachte ein n-dimensionales Volumen im Phasenraum. Die Punkte innerhalb dieses Volumens bewegen sich mit der Zeit nach dem Bewegungsgesetz

$$\dot{x}_i = F_i(x_1 \ldots x_n), \quad i = 1 \ldots n, \tag{1}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = \vec{F}(\vec{x}). \tag{2}$$

Das kann durch Verschieben der Oberfläche zu einer Änderung des Volumens führen: wenn das Oberflächenelement $\mathrm{d}\vec{S}$ sich in der Zeit $\mathrm{d}t$ um

$$\mathrm{d}\vec{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

verschiebt, ist die Volumenänderung an einer Stelle $\vec{x}$ auf dem Rand

$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

und die gesamte Änderung wird mit dem Satz von Gauß

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \oint_{\partial V} \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}\,\mathrm{d}^n x. \tag{5}$$

Somit bleibt das Phasenraumvolumen erhalten, wenn

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \tag{6}$$

gilt. Systeme mit dieser Eigenschaft sind *konservative Systeme*; wenn Volumenerhaltung nicht erfüllt ist, sind es *dissipative Systeme*.

Man beachte, dass die Mathematik hier genauso aussieht wie im gewöhnlichen 3-dimensionalen Raum, wir es aber in Wirklichkeit mit einem n-dimensionalen Raum mit völlig anderer Bedeutung der Koordinaten zu tun haben. In Analogie zum gewöhnlichen Raum ist

$$\nabla \cdot \vec{F} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i \tag{7}$$

zu definieren.

Für das Pendel gilt nach den obigen Bewegungsgleichungen

$$F_\vartheta = \omega, \quad F_\omega = -\frac{\omega}{q} - \sin\vartheta + f\cos\varphi, \quad F_\varphi = \omega_D \tag{8}$$

und die Divergenz wird zu

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}F_\vartheta + \frac{\partial}{\partial\omega}F_\omega + \frac{\partial}{\partial\varphi}F_\varphi = -\frac{1}{q} \tag{9}$$

Volumenerhaltung gilt also, wenn der Reibungsterm verschwindet; ansonsten schrumpft das Volumen.

Die Volumenerhaltung ist eine weitere Eigenschaft, die die Bewegung im Phasenraum einschränkt.