2. Vorlesung Sommersemester

1 Ziele der *analytischen Mechanik*

In der *Lagrange'schen* und *Hamilton'schen* Formulierung der Mechanik werden die Newton'schen Prinzipien auf viele komplexere Probleme anwendbar gemacht. Zusätzlich gelingt die Konstruktion von *Variationsprinzipien* wie dem *Prinzip der kleinsten Wirkung,* mit denen die Mechanik auf eine neue und viel allgemeinere Grundlage gestellt wird. Schließlich steht diese Formulierung der Mechanik formal viel näher zur Quantenmechanik.

Vorteile der neuen Vorgehensweise sind u. a.

- Bewegungen, die Einschränkungen unterliegen (*Zwangsbedingungen*), können einfacher formuliert werden, da man die Zwangskräfte, die die Einhaltung der Zangsbedingungen sicherstellen nicht kennen muss.
- Man arbeitet mit generalisierten Koordinaten, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind aber ansonsten weitgehend frei gewählt werden können (Beispiel Pendel: ein Auslenkwinkel statt zwei Positionskoordinaten). Damit wird auch der Übergang zu anderen Koordinatensystemen wesentlich erleichtert.
- Man kann auch Bewegungsgleichungen aufstellen, wenn die Koordinaten nicht mit den Positionen von Punktteilchen zusammenhängen (Beispiel: Drehwinkel eines starren Körpers).
- Die Gleichungen sind von skalarem statt vektoriellen Charakter.

2 Zwangsbedingungen

Bei Zwangsbedingungen (engl.: *constraints*)unterscheidet man (Beispiele weiter unten):

- *Holonome* Zwangsbedingungen: sie sind als Gleichungen formulierbar, und
- *Nichtholonome* Zwansbedingungen: nicht in dieser Form formulierbar, z. B. Ungleichungen.

Holonome Zwangsbedingungen werden weiter unterschieden in

- *skleronome* Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig,
- *rheonome* Zwangsbedingungen dagegen zeitabhängig.

3 Generalisierte Koordinaten

Holonome Zwangsbedingungen lassen sich per Definition als Gleichungen ausdrücken, die die Koordinaten der Teilchen einschränken. Für N Punktteilchen mit den Ortsvektoren $\vec{r}_i$, $i = 1 \ldots N$ seien etwa p Zwangsbedingungen

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_N, t) = 0, \quad k = 1 \ldots p \tag{1}$$

gegeben. Dann sind von den $3N$ Koordinaten der Teilchen nur $s = 3N - p$ unabhängig. Das ist die Anzahl der *Freiheitsgrade* des Systems.

Man kann nun s generalisierte Koordinaten $q_i,\ i = 1 \dots s$ einführen, die die Koordinaten der Teilchen unter Einhaltung der Zwangsbedingungen eindeutig festlegen. Sie erfüllen:

- Die Ortsvektoren sind durch sie bestimmt (das kann im Fall rheonomer Zwangsbedingungen noch von der Zeit abhängen): $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots q_s, t)$.
- Für jede beliebige Wahl der generalisierten Koordinaten sind die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt.
- Die generalisierten Koordinaten sind voneinander unabhängig, d. h. es gibt keine Beziehung der Art $f(q_1, \dots q_s, t) = 0$.

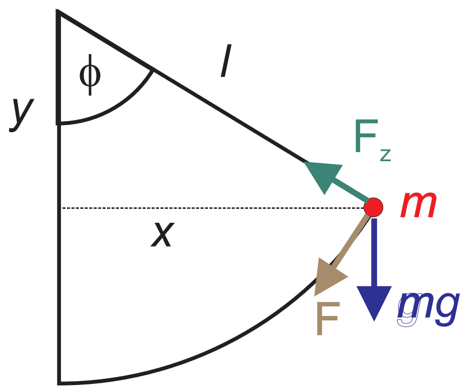
Der s-dimensionale Raum der generalisierten Koordinaten heißt *Konfigurationsraum,* da jeder Punkt in ihhm eindeutig eine Konfiguration des Systems festlegt. Die Zeitableitungen $\dot{q}_i,\ i = 1 \dots s$ heißen *generalisierte Geschwindigkeiten.*

4 Beispiele

1. **Das Pendel:** Die Zwangsbedingung lässt sich als zeitunabhängige Gleichung $x^2 + y^2 = l^2$ schreiben: die Zwangsbedingung ist somit skleronom. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist 1 (das Pendel ist zweidimensional, also $s = 2N - p$ mit $N = 1$ und $p = 1$.

   Man kann aber auch von drei Dimensionen ausgehen und als zweite Zwangsbedingung $z = 0$ fordern). Als generalisierte Koordinate bietet sich der Winkel ϕ an, es gut könnte aber auch x oder y gewählt werden. Die Entscheidung sollte berücksichtigen, was zu einfacheren Gleichungen führt.

   Mit dem Winkel als generalisierter Koordinate wird $x = l \sin\phi$, $y = l\cos\phi$ und $z = 0$ und die Zwangsbedingung ist für alle Werte der Koordinate erfüllt.

   Das Bild illustriert auch die Kräfte: zur Schwerkraft kommt die Zwangskraft (grün) hinzu, die der Faden ausübt, so dass die resultierende Kraft (braun) in tangentialer Richtung steht.

2. **Die Hantel:** Zwei Massenpunkte mit festem Abstand. Die Zwangsbedingung $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2$ ist skleronom, Anzahl der Freiheitsgrade 5. Als generalisierte Koordinaten kann man etwa die drei Koordinaten des Schwerpunktes und zwei Richtungswinkel wählen. Man beachte, dass die Hantel nicht um ihre Achse rotieren kann!