3. Vorlesung Sommersemester

1 Beispiele (Fortsetzung)

1. **Der starre Körper:** Formulierung der Zwangsbedingungen später. Anschaulich sind schon die Freiheitsgrade: drei der Translation (z. B. Schwerpunktskoordinaten) und drei der Rotation (im Unterschied zur Hantel kann ein starrer Körper sich um jede Achse drehen). Dieser Fall ist wieder skleronom.

2. **Ein Teilchen auf einer Kugeloberfläche:** Wenn es von der Kugel herunterfallen kann: nichtholonom.

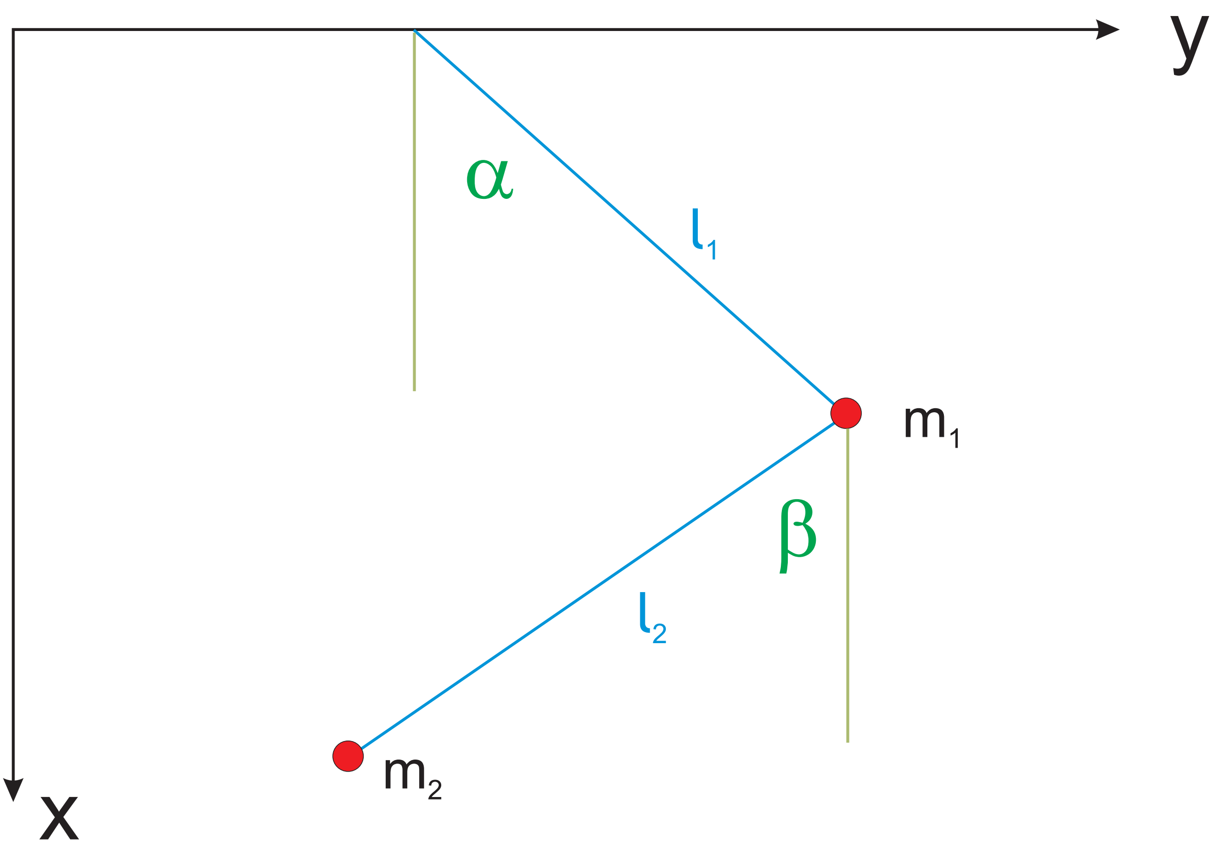
3. **Ein Teilchen in einer Kugel eingesperrt:** Zwangsbedingung: $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$: nichtholonom.

4. **Ein Zylinder, der eine schiefe Ebene hinunterrollt:** Wenn er rutschen kann: nichtholonom, andernfalls skleronom. Als generalisierte Koordinaten sind etwa der zurückgelegte Weg oder der Drehwinkel denkbar.

5. **Ein Teilchen auf einem rotierenden Draht:** Ein Draht rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω, und ein Massenpunkt bewege sich auf ihm. Die Zwangsbedingung ist holonom und rheonom. Eine passende generalisierte Koordinate ist der Abstand r vom Rotationszentrum und die Koordinaten des Massenpunktes sind gegeben durch
$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t. \tag{1}$$

1.1 Das Doppelpendel

Als ein etwas komplizierteres Beispiel sei noch das Doppelpendel aus der folgenden Figur angegeben.



Das System ist holonom und skleronom. Die Zwangsbedingungen sind

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2, \quad z_1 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2, \quad z_2 = 0, \tag{2}$$

so dass die Zahl der Freiheitsgrade $s = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ wird. Naheliegende generalisierte Koordinaten sind etwa die Winkel α und β. Mit ihnen werden die Koordinaten ausgedrückt als

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos\alpha, \quad y_1 = l_1 \sin\alpha, \quad z_1 = 0, \\ x_2 &= l_1 \cos\alpha + l_2 \cos\beta, \quad y_2 = l_1 \sin\alpha + l_2 \cos\beta, \quad z_2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Eine Beschreibung der Bewegung eines mechanischen Systems mit Hilfe generalisierter Koordinaten hätte den Vorteil, dass die Koordinaten i. a. eine geringere Anzahl haben und die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt werden, d. h. aus der Beschreibung verschwinden. Die Frage ist, wie man von den elementaren physikalischen auf die generalisierten Koordinaten umschreiben kann. In den Newtonschen Gleichungen auf generalisierte Koordinaten zu transformieren macht sie nur komplizierter und eliminiert keineswegs die Zwangskräfte. Den Ausweg bietet das *Prinzip von d'Alembert*, das im wesentlichen besagt, dass die Zwangskräfte keine Arbeit leisten.

Wir beginnen also mit der Betrachtung der Arbeit, die von den verschiedenen Kräften am Punktteilchen Nummer i geleistet wird, und zwar bei einer kleinen Verrückung $\delta\vec{r}_i$, *die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist*, d. h. z. B. beim pendel, dass δx und δy so miteinander verknüpft sind, dass die Bewegung tangential erfolgt.

Eines ist noch zu beachten: wir können nur bei skleronomen Zwangsbedingungen erwarten, dass die Zwangskräfte keine Arbeit leisten. Dagegen wird z. B. beim Teilchen im Aufzug die potentielle Energie des Teilchens durch die Zwangskraft erhöht, die es nach oben bewegt, und der Massenpunkt auf dem rotierenden Draht wird, wie man aus Erfahrung weiß, nach außen geschleudert, also durch die Zwangskraft beschleunigt. Für die Formulierung des d'Alembertschen Prinzips betrachtet man also *virtuelle Verrückungen*, bei denen die Zeit festgehalten wird, deswegen $\delta\vec{r}_i$ statt $\mathrm{d}\vec{r}_i$. Sie sind also verträglich mit den Zwangsbedingungen zu fester Zeit.

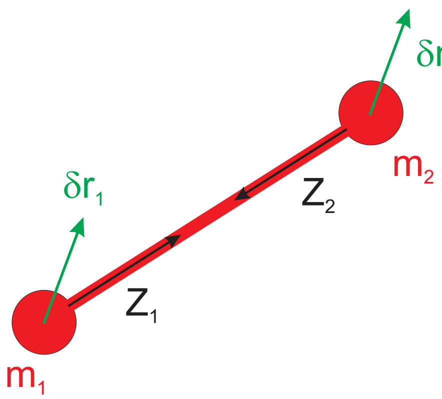
Wenn man die auf den Massenpunkt i wirkende Kraft $\vec{F}_i$ zerlegt in Zwangskraft $\vec{F}_{zi}$ und "treibende Kraft" $\vec{F}_i$, so wird zunächst aus der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{zi}, \tag{4}$$

und die Multiplikation mit der virtuellen Verrückung und Sumation über alle Teilchen führt auf

$$\sum_i \left(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_{zi} \cdot \delta\vec{r}_i. \tag{5}$$

Warum die Summe über i? Es ist i. a. tatsächlich nur die Summer der virtuellen Arbeiten an den Massenpunkten konstant, wie man am Beispiel der Hantel sieht.



Die Zwangskräfte, die die beiden Massenpunkte auf festem Abstand halten, erfüllen nach dem 3. Newtonschen Axiom $\vec{F}_{z1} = -\vec{F}_{z2}$. Wenn nun beide Massenpunkte dieselbe virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2$ erfahren, die mit der Zwangsbedingung verträglich ist, so sind die einzelnen virtuellen Arbeiten zwar ungleich Null, aber für die desamte gilt

$$\vec{F}_{z1} \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{z2} \cdot \delta\vec{r}_2 = 0. \tag{6}$$

In diesem Fall ist natürlich erlaubt, dass einer der Massenpunkte eine zusätzliche Rotation relativ zum anderen erfährt; diese ist aber dann senkrecht zu den Zwangskräften und spielt bei Betrachtung der Arbeit keine Rolle.

Damit haben wir das *Prinzip der virtuellen Arbeit* $\sum_i \vec{F}_{zi} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, das zusammen mit (5) das *d'Alembertsche Prinzip*

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{7}$$

ergibt.

Die Annahme, dass die Zwangskräfte keine Arbeit bei virtuellen Verrückungen leisten, lässt sich natürlich nicht aus den Newtonschen Axiomen ableiten, sondern ist eine zusätzliche Forderung, die sich aber in der Praxis bewährt hat.

3 Ableitung von Bewegungsgleichungen

3.1 Zieldiskussion

Was haben wir durch das d'Alembertsche Prinzip gewonnen? Zum einen sind die Zwangskräfte verschwunden — das gilt aber nur scheinbar: die Komponenten der $\delta\vec{r}_i$ sind ja nicht unabhängig voneinander wählbar, sondern müssen die Zwangsbedingungen einhalten. Der Trick ist nun folgender: wenn wir die virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ durch die Änderungen der generalisierten Koordinaten δq_k ersetzen, dann sind diese voneinander unabhängig, Das bedeutet aber, dass wir aus einer resultierenden Gleichung der Form

$$\sum_k G_k \delta q_k = 0 \tag{8}$$

sofort $G_k = 0$ für alle k erhalten, weil wir ja z. B. alle δq_k außer einem einzigen Null setzen können — die Definition der q_k garantiert ja, dass ihre Änderung immer mit den Zwangsbedingungen verträglich ist. Somit sollte es also möglich sein, aus der Summengleichung eine Reihe einzelner Gleichungen für jedes q_k zu erhalten, also Bewegungsgleichungen.

Wenn es übrigens keine Zwangsbedingungen gibt, sind die $\delta\vec{r}_i$ voneinander unabhängig und man erhält aus (7) sofort wieder die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die einzelnen Teilchen zurück.

3.2 Transformationgrundlagen

Gehen wir von den Definitionsgleichungen aus:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots q_s, t), \qquad i = 1, \ldots N. \tag{9}$$

Hier bezeichnet wie üblich N die Anzahl der Punktteilchen und s die der Freiheitsgrade. Die Zeitableitung ergibt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \\ &\rightarrow \dot{\vec{r}}_i(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t). \end{aligned} \tag{10}$$

Dieser Ausdruck hängt aber von den generalisierten Geschwindigkeiten nur linear ab und man sieht aus der ersten Zeile sofort die Gleichung

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \tag{11}$$

die später noch benötigt wird.

Für die virtuellen Verrückungen wird die Zeit festgehalten, also gilt

$$\delta\vec{r}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \tag{12}$$

3.3 Transformation des Kraftterms

Jetzt können wir die einzelnen Bestandteile des d'Alembertschen Prinzips transformieren. Für die Arbeit der treibenden Kräfte erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{s} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k, \end{aligned} \tag{13}$$

wobei

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{14}$$

die Komponenten der *generalisierten Kraft* darstellen.

In konservativen Systemen lassen sich die Kräfte aus dem Potential über

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N), \qquad i = 1, \ldots, N \tag{15}$$

darstellen. Dann wird einfach

$$Q_k = -\sum_{i=1}^{N} \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}. \tag{16}$$

3.4 Transformation des Impulsterms

Der andere Teil des d'Alembertschen Prinzips ist etwas schwieriger umzuformen. Zunächst erhält man

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \sum_k m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \tag{17}$$

Hierin muss noch die Beschleunigung durch generalisierten Koordinaten und ihre Zeitableitungen ausgedrückt werden. Wir schreiben

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \tag{18}$$

Der zweite Term hierin kann wiederum umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} &= \sum_l \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k}, \end{aligned} \tag{19}$$

Diese Nebenrechnung führt eigentlich nur aus, dass man die vollständige Ableitung nach t mit den partiellen Ableitungen nach den q_k vertauschen kann.

Mit diesen Ergebnissen kann nun umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k \\ = & \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right) \right] \delta q_k \end{aligned} \tag{20}$$