4. und 5. Vorlesung Sommersemester

1 Beispiele

Setzen wir nun nur dieses Ergebnis sowie die Gleichung (??) in (??) ein, so wird daraus

$$
\begin{aligned}
\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i \sum_k m_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k \\
&= \sum_i \sum_k m_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right) \right] \delta q_k \qquad (1) \\
&= \sum_k \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die erste Umformung des d'Alembertschen Prinzips erreicht:

$$\sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0. \qquad (3)$$

1.1 Holonomer Fall

Für holonomer Zwangsbedingungen können wir nun tatsächlich verwenden, dass die q_k nunmehr unabhängig sind und die Summe in Einzelgleichungen zerlegen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, s. \qquad (4)$$

1.2 Konservative Systeme

Wenn die treibenden Kräfte konservativ sind, gilt $Q_k = -\partial V / \partial q_k$ und es wird aus (4)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, s. \qquad (5)$$

Wenn V nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängt, kann man V auch in den ersten Term einfügen und schreibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, s. \qquad (6)$$

1.3 Die Lagrangegleichungen 2. Art

Es liegt nahe, mit der Definition der *Lagrangefunktion*

$$L = T - V \qquad (7)$$

diese Gleichungen einfacher zu schreiben. Das sind die fundamentalen *Lagrangegleichungen 2. Art*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, s. \qquad (8)$$

1.4 Einfaches Beispiel

Als triviales erstes Beispiel sei der Fall eines Punktteilchens in einer Dimension ohne Zwangsbedingungen diskutiert. In diesem Fall sollte die Newtonsche Bewegungsgleichung wieder herauskommen. Das Teilchen bewege sich im Potential $V(x)$, seine kinetische Energie ist $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Um den neuen Formalismus klar hervorzuheben, benutzen wir $q = x$ als einzige generalisierte Koordinate. Dann ist

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= m\dot{q}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q} \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= -\frac{\partial V}{\partial q} \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{q} + \frac{\partial V}{\partial q}. \end{aligned} \tag{9}$$

In die alte Koordinate zurückgeschrieben gibt das die vertraute Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{10}$$

1.5 Polarkoordinaten

Hier soll gezeigt werden, dass der Lagrange-Formalismus auch bei einfachen Koordinatentransformationen schon die Beschreibung vereinfacht. In ebenen Polarkoordinaten $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ mussten wir zur Anwendungder Newtonschen Bewegungsgleichungen die Beschleunigung in Richtung von $\vec{e}_\varrho$ bzw. $\vec{e}_\varphi$ zerlegen. Im Lagrange-Formalismus brauchen wir jetzt nur noch die Form der kinetischen Energie. Mit ϱ und φ als generalisierten Koordinaten wird die Lagrangefunktion zu

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2\right) - V(\varrho, \varphi). \tag{11}$$

Die Lagrangegleichungen werden sofort zu

$$\begin{aligned} m\ddot{\varrho} &- m\varrho\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \varrho} = 0, \\ m\varrho^2\ddot{\varphi} &+ 2m\varrho\dot{\varrho}\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Das sind genau die Bewegungsgleichungen für die ϱ- und φ-Richtung aus dem letzten Semester. Letztere wird üblicher geschrieben als

$$m\varrho\ddot{\varphi} + 2m\dot{\varrho}\dot{\varphi} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \tag{13}$$

weil dann die Dimension der einer Kraft entspricht.

1.6 Das Pendel

Als erstes Beispiel mit wirklicher Zwangsbedingung nun das Pendel! Wählen wir die y-Koordinate nach unten, so ist mit dem Winkel φ als generalisierter Koordinate

$$\begin{aligned} x &= l\sin\varphi, \qquad y = l\cos\varphi, \\ T &= \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2, \qquad V = -mgy = -mgl\cos\varphi. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir bekommen also als Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos\varphi. \tag{15}$$

Die Lagrangegleichung wird zu

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = 0, \tag{16}$$

also die Bewegungsgleichung

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin\varphi = 0. \tag{17}$$

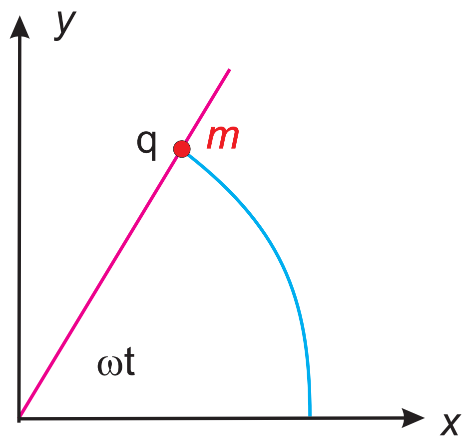
Für den Fall kleiner Schwingungen kann man $\sin\varphi \approx \varphi$ schreiben und bekommt

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi = 0, \tag{18}$$

also einen harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{g/l}$.

2 Allgemeines Vorgehen

Stellen wir jetzt am Beispiel des rotierenden Drahtes die Vorgehensweise einmal Schritt für Schritt zusammen.



Schritt	Im Beispiel
Formulierung der Zwangsbedingungen	$y = x \tan \omega t$
Wahl der generalisierten Koordinaten und Transformation	r, $x = r\cos\omega t$, $y = r \sin \omega t$
Berechne $\vec{r}$ und daraus T	$\dot{x} = \dot{q}\cos\omega t - \omega q \sin\omega t$, $\dot{y} = \dot{q}\sin\omega t + \omega q \cos\omega t$, $T = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)$.
Berechne V	$V = 0$
Stelle L auf	$L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)$
Berechne Lagrange-Gleichungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$	$m\ddot{q} - m\omega^2 q = 0$
Berechne Lösung	$q(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

Zur physikalischen Lösung: wenn der Massenpunkt am Anfang bei r_0 ruht, $q(0) = r_0$, ist $A = B = r_0/2$ und die Lösung wird

$$q(t) = \frac{r_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right). \tag{19}$$

Der Massenpunkt wird also exponentiell nach außen geschleudert. Da in diesem Fall rheonomer Zwangsbedingung die Zwangskraft Arbeit leistet, nimmt seine kinetische Energie zu.

3 Einfache Erhaltunssätze im Lagrange-Formalismus

Die Lagrange-Gleichungen selbst können Erhaltung beschreiben. Aus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{20}$$

für irgen eine generalisierte Koordinate q_k folgt ja sofort, dass die Größe

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{21}$$

erhalten ist, wenn

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{22}$$

gilt. Letzteres bedeutet, dass die Lagrangefunktion von der generalisierten Koordinate q_k unabhängig sein muss. Eine solche Koordinate nennt man eine *zyklische Koordinate*, und p_k ist der zur Koordinate q_k konjugierte *generalisierte Impuls*.

Dass das irgenwie im Zusammenhang mit vertrauten Erhaltungssätzen steht, zeigen die zwei einfachen Beispiele der letzten Vorlesung. Für die eindimensionale Bewegung ohne Zwangsbedingungen ist $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$; wenn nun das Potential nicht von q abhängt (d. h., Kraft verschwindet), wird $p = \partial L/\partial \dot{q} = m\dot{q}$ konstant. Das ist nichts anderes als die gewöhnliche Impulserhaltung.

Im Falle der ebenen Polarkoordinaten nach Abschnitt 1.5 war dagegen

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2\right) - V(\varrho,\varphi). \tag{23}$$

L hängt nicht von φ ab, wenn es das Potential nicht tut, und die zugehörige Erhaltungsgröße ist

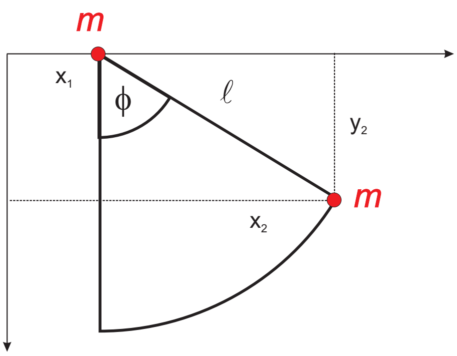
$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi}, \tag{24}$$

was genau dem vertrauten Drehimpuls entspricht!

Der generalisierte Impuls ist also wirklich in dem Sinne eine verallgemeinerte Größe, als er einem linearen Impuls, einem Drehimpuls oder auch anderen physikalischen Größen entsprechen kann.

4 Ein ausführlicheres Beispiel

Die gleitende Hantel ist eine Hantel mit zwei Massen m, deren eine frei beweglich auf der horizontalen x-Achse angebracht ist. Es wirke die Schwerkraft. Wir werden in diesem Falle auch die Erhaltungsgrößen genauer ansehen.



4.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Die Zwangsbedingungen sind in diesem Falle

$$y_1 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = l^2, \tag{25}$$

wobei die dritte Dimension z schon weggelassen wurde.

Damit bleiben zwei Freiheitsgrade, und wir können etwa $q_1 = x_1$ und $q_2 = \phi$ nach der zeichnung auswählen. Die Transformation wird

$$x_1 = q_1, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = q_1 + l \sin q_2, \quad y_2 = l \cos q_2, \tag{26}$$

4.2 Aufstellen der Lagrangefunktion

Die kinetische Energie erhält man aus

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1, \quad \dot{x}_2 = \dot{q}_1 + l\dot{q}_2 \cos q_2, \quad \dot{y}_1 = 0, \quad \dot{y}_2 = -l\dot{q}_2 \sin q_2 \tag{27}$$

zu

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \tag{28}$$

$$= m\dot{q}_1^2 + \frac{m}{2}(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2) \tag{29}$$

Die gesamte potentielle Energie ist (Nullpunkt des Gravitationspotentials bei $y = 0$)

$$V = -mgy_2 = -mgl \cos q_2. \tag{30}$$

Damit wird die Lagrangefunktion zu

$$L = m\dot{q}_1^2 + \frac{m}{2}(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2) + mgl \cos q_2. \tag{31}$$

4.3 Erhaltungsgrößen

Ansehen der Lagrangefunktion zeigt, dass die Koordinate q_1 zyklisch ist. Der zugehörige konjugierte Impuls

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2m\dot{q}_1 + ml\dot{q}_2 \cos q_2 \tag{32}$$

ist also konstant; setzen wir $p_1 = 2mC$. Wir können damit $\dot{q}_1$ ausdrücken,

$$\dot{q}_1 = C - \frac{l}{2}\dot{q}_2 \cos q_2 = C - \frac{l}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin q_2. \tag{33}$$

Das kann aber integriert werden:

$$q_1(t) = Ct - \frac{l}{2} \sin q_2 + B \tag{34}$$

mit einer Integrationskonstante B.

4.4 Weitere Eigenschaften der Lösung

Schauen wir kurz die soweit gewonnene Lösung für eine naheliegende Anfangsbedingung an: die Hantel stehe senkrecht im Punkt $x = 0$ und habe nur eine Anfangswinkelgeschwindigkeit,

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = \omega. \tag{35}$$

Wir berechnen daraus $B = 0$, $C = l\omega/2$. Die Zeitabhängigkeit von q_2 ist jetzt nicht bestimmt und wird auch komplizierter; es soll ausreichen, die Form der Bewegung zu bestimmen. Um das einfacher zu schreiben, wird $q_2 = \phi(t)$ eingesetzt. Mit den jetzigen Ergebnissen ist

$$\begin{aligned} x_1(t) &= q_1(t) = \frac{l}{2}\left(\omega t - \sin\phi(t)\right), \\ x_2(t) &= x_1(t) + l\sin\phi(t) = \frac{l}{2}\left(\omega t + \sin\phi(t)\right), && (36) \\ y_2(t) &= l\cos\phi. && (37) \end{aligned}$$

Bezogen auf die Position x_1, d. h. im System der oberen Masse der Hantel, beschreibt die untere Masse die Bahnkurve

$$x_2(t) - x_1(t) = l\sin\phi, \qquad y_2(t) = l\cos\phi, \tag{38}$$

also einen Kreis mit Radius l.