6. Vorlesung Sommersemester

1 Verallgemeinerte Potentiale

In diesem und dem nächsten Abschnitt sollen kurz zwei Varianten des Lagrange-Formalismus vorgestellt werden. Für holonome Kräfte hatten wir ja allgemein

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, s, \tag{1}$$

und das führte für konservative verallgemeinerte Kräfte mit

$$Q_k = \frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{2}$$

und unter der zusätzlichen Annahme, dass das Potential nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängt, zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art. Letzteres war notwendig, damit das Potential auch in den ersten Term von (1) einbezogen werden kann.

Wenn man aber den Fall hat, dass es ein *verallgemeinertes Potential* $U(q, \dot{q}, t)$ gibt (der Kürze wegen für eine generalisierte Koordinate formuliert), mit

$$Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial q}, \tag{3}$$

dann kann genauso wieder die Lagrangefunktion $L = T - U$ eingeführt werden. Dieser Fall erscheint ein wenig speziell, ist aber genau für die Lorentzkraft der Elektrodynamik realisiert.

2 Reibungskräfte

Reibungskräfte sind nicht aus einem Potential ableitbar und entsprechen auch nicht Zwangsbedingungen. Um sie zu berücksichtigen, muss man wirklich die Lagrange-Gleichungen modifizieren. Man erwartet, dass die Reibungskräfte (für den wichtigsten Fall Stokes'scher Reibung) proportional zu den generalisierten Geschwindigkeiten sind,

$$Q_k^r = -\sum_{l=1}^{s} \beta_{kl}\dot{q}_l \tag{4}$$

mit irgendwelchen Reibungskoeffizienten β_{kl}. Mit Hilfe der *Rayleighschen Dissipationsfunktion*

$$D = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{s} \beta_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \tag{5}$$

kann man dann modifizierte Lagrange-Gleichungen der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, s. \tag{6}$$

einführen, die solche Reibungskräfte enthalten.

3 Energieerhaltung

Unter den Erhaltungssätzen, die zu zyklischen Koordinaten gehören, findet sich nicht die Energieerhaltung. Diese muss man versuchen, aus den Lagrangegleichungen abzuleiten.

Wir beginnen mit der Newtonschen Gesamtenergie und versuchen, auszurechnen, ob diese im Lagrangeformalismus erhalten ist.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V)=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)+\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

Hierin muss man irgendwie die Lagrangegleichungen ins Spiel bringen. Auf die nötige Form führt die folgende Umformung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j+\dot{q}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \tag{8}$$

Wie sieht die kinetische Energie aus? Falls die Zwangsbedingungen skleronom sind, ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

und das heißt, dass die kinetische Energie homogen vom zweiten Grade in den generalisierten Geschwindigkeiten ist:

$$Z=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_i\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\sum_{jl=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_j\dot{q}_l \tag{9}$$

Damit gilt aber (s. u.) die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=2T,$$

aufsummieren von (8) führt also zu

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j=\frac{\mathrm{d}}{dt}(2T)-\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \tag{10}$$

Wenn das Potential nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, kann man auf den letzten Term die Lagrangegleichungen anwenden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \tag{11}$$

Reibungsterme wurden dabei zugelassen. Jetzt kann alles in (7) eingesetzt werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V)=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T)+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}-\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j \tag{12}$$

Hierin werden noch der erste Term mit der analogen Ableitung der Lagrangefunktion im letzten kombiniert und berücksichtigt, dass die Dissipationsfunktion ebenfalls homogen ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V)=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T+V)+2D=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+\frac{d}{dt}(2T+V)+2D \tag{13}$$

woraus schließlich die Energiegleichung resultiert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = -2D \tag{14}$$

Bei skleronomen Zwangsbedingungen nimmt also die Gesamtenergie ausschließlich durch Reibungskräfte ab; ohne diese ist sie erhalten.

Später werden wir die Erweiterung dieses Satzes auf rheonome Zwangsbedingungen ableiten.

4 Homogene Funktionen

Eine Funktion f von n Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ heißt homogen vom Grade p, wenn

$$f(ax_1, ax_2, \dots ax_n) = a^p f(x_1, x_2, \dots x_n) \tag{15}$$

Für solche Funktionen gilt der wichtige Satz

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1 \dots x_n) = p f(x_1 \dots x_n) \tag{16}$$

Beispiele:

- $f(x, y) = x^2 + 5xy - 3y^2$ ist homogen vom Grade 2.
- $f(x, y, z) = x^2 + xyz + z^3 - x^2 y$ ist nicht homogen.
- $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + xy^2 + xyz$ ist homogen vom Grade 3.

Von der Gültigkeit des Ableitungsgesetzes überzeugt man sich am besten durch die Beispiele.

5 Variationsrechnung

Die Formulierung von Variationsprinzipien ist eine sehr wertvolle Methode in der Physik. Um sie verwenden zu können, müssen wir zunächst die mathematische Lösung einer Art von Minimierungs- bzw. Maximierungsproblemen kennenlernen.

Es sei $f(y(x), y'(x), x)$ eine Funktion (sie ist natürlich nicht phne Grund ähnlich zu einer Lagrangefunktion $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ gewählt; ich verwende aber andere Buchstaben, um die Allgemeinheit der mathematischen Ableitung zu betonen). Die hierin vorkommende unbekannte Funktion $y(x)$ soll so gewählt werden, dass das Integral

$$S\{y\} = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)\, dx \tag{17}$$

einen extremalen Wert annimmt, d. h. bei kleinen Änderungen der Funktion y stets zunimmt (für ein Minimum) oder abnimmt (für ein Maximum).Dabei sollen die Werte der Funktion an den Intervallenden konstant bleiben, d. h. $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ sind fest. Der Ausdruck $S\{y\}$ ordnet einer Funktion einen Zahlenwert zu und wird oft als *Funktional* bezeichnet.

Um dieses Problem zu lösen, variieren wir die Funktion $y(x)$, indem an jeder Stelle x ihr Wert verändert wird: $y(x) \to y(x) + \delta y(x)$. Die Funktion muss dabei stetig und differenzierbar bleiben, so dass man sofort $y'(x) \to y'(x) + \frac{d}{dx}\delta y(x)$ erhält. Es gilt also $\delta y'(x) = \frac{d}{dx}\delta y(x)$.

Das Integral ändert sich in erster Ordnung als

$$\begin{aligned} \delta S &= S\{y+\delta y\} - S\{y\} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y \right] dx. \end{aligned} \tag{18}$$

Der einzige Trick in der Ableitung ist jetzt eine partielle Integration im zweiten Term:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y \right] dx \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \right]_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

Der letzte Term verschwindet, weil δy an den Integrationsgrenzen ja Null sein soll. Die beiden anderen fassen wir zusammen zu

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right] \delta y \, dx. \tag{19}$$

Man sieht, dass die Änderung des Funktionals linear in δy ist. Wenn nun eine kleine Änderung δy zu einer Zunahme des Wertes von S führt, kann man offensichtlich mit $-\delta y$ eine Abnahme erreichen und umgekehrt. Deswegen muss für ein Extremum die Änderung erster Ordnung verschwinden, $\delta S = 0$, und da δy ansonsten beliebig gewählt werden kann, kann dies nur gelten wenn die *Euler-Lagrange*-Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{20}$$

gelten. Das Variationsproblem selbst kann man nun auch so schreiben:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx = 0. \tag{21}$$

Wenn das Funktional von mehreren Funktionen abhängt, führen die gleichen Gedankengänge zu einem Satz von Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(y_1, y_2, \dots y_r, y_1', y_2', \dots y_r', x)\, dx = 0 \tag{22}$$

mit der Nebenbedingung, dass alle r Funktionen $y_i(x)$ bei x_1 und x_2 feste Werte haben, führt auf den Satz von Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad i = 1 \dots r \tag{23}$$