9. Vorlesung Sommersemester

1 Homogenität des Raumes

Wenn die Lagrangefunktion gegenüber einer Verschiebung *aller Teilchen gleichzeitig* invariant ist, folgt daraus die Impulserhaltung. Es ist im wesentlichen zu zeigen, dass zu einer generalisierten Koordinate, die eine solche gleichzeitige Verschiebung beschreibt, der zugehörige generalisierte Impuls mit dem gewöhnlichen Impuls identisch ist.

Wenn q_j einer Verschiebung zugeordnet ist, heißt das, dass eine Änderung von q_j eine dazu proportionale Verschiebung der Positionen der Punktteilchen bedeutet:

$$\vec{r}_i(q_j + \delta q_j) = \vec{r}_i(q_j) + \delta q_j\, \vec{n}_j, \quad i = 1 \dots N \tag{1}$$

(alle anderen q_k behalte ihren Wert). $\vec{n}_j$ ist ein Vektor, der die Verschiebungsrichtung angibt. Er kann, muss aber nicht, Einheitsvektor sein. Wichtig ist, dass eben für alle Punktteilchen i dieselbe Verschiebung gilt.

Aus (4) leitet man über den Differenzenquotienten die Ableitung her, die ebenfalls unabhängig von i wird::

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{n}_j. \tag{2}$$

Da nun q_j eine zyklische Koordinate sein muss, wenn sich L unter der Verschiebung nicht ändert, ist der zugehörige generalisierte Impuls erhalten:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = \sum_i \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) \\ &= \sum_i \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_i \left(m_i \dot{\vec{r}}_i\right) \cdot \vec{n}_j = \vec{P} \cdot \vec{n}_j \end{aligned} \tag{3}$$

Hierin wurde noch angenommen, dass das Potential wie üblich nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängt, und die aus der Ableitung der Lagrangegleichung bekannte Beziehung $\partial \dot{\vec{r}}_i / \partial \dot{q}_j = \partial \vec{r}_i / \partial q_j$ verwendet.

Man sieht also, dass die Projektion des Gesamtimpulses in Richtung der Verschiebung erhalten ist. Der generalisierte Impuls ist mit dieser Projektion identisch, wenn $\vec{n}_j$ Einheitsvektor ist, andernfalls unterscheidet er sich durch einen konstanten Faktor davon.

2 Isotropie des Raumes

Sehr ähnlich geht es mit der Drehinvarianz. Wenn eine generalisierte Koordinate q_j eine Drehung beschreibt und die Lagrangefunktion unter dieser Drehung invariant bleibt, so ist q_j zyklische Koordinate und der zugehörige generalisierte Impuls erhalten. Die Wirkung einer Änderung von q_j wird beschrieben durch

$$\vec{r}_i(q_j + \delta q_j) = \vec{r}_i(q_j) + \delta q_j\, \vec{n}_j \times \vec{r}_i(q_j), \quad i = 1 \dots N, \tag{4}$$

wobei der Vektor $\vec{n}_j$ die Richtung der Drehachse hat. Die Rechnung aus dem vorigen Abschnitt wiederholt sich exakt bis zum letzten Schritt in (3):

$$p_j = \sum_i \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{n}_j \times \vec{r}_i) = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) \cdot \vec{n}_j = \vec{L} \cdot \vec{n}. \tag{5}$$

Die Komponente des Gesamtdrehimpulses in Richtung der Drehachse ist also erhalten, und wenn $\vec{n}_j$ Einheitsvektor ist, ist sie mit dem generalisierten Impuls identisch.

Die Ableitung hat gezeigt, dass Drehimpulserhaltung auch für einzelne Komponenten gelten kann, wenn das System um die entsprechende Achse symmetrisch ist. Bei Zylindersymmetrie ist die Komponente in Richtung der Zylinderachse erhalten.

3 Das Noether-Theorem

Die bisher abgeleiteten Sätze sind Spezialfälle der allgemeinen Formulierung, die von Emmy Noether gegeben wurde. Man geht vom Hamiltonschen Prinzip aus:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, \mathrm{d}t = 0. \tag{6}$$

Der Einfachheit halber wird nur eine generalisierte Koordinate betrachtet; der allgemeine Fall wird später angegeben und enthält wie üblich Summen über die Koordinaten. Wir betrachten nun infinitesimale Transformationen der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} q(t) &\rightarrow q^*(t) = q(t) + \epsilon \psi(q, \dot{q}, t), \\ t &\rightarrow t^* = t + \epsilon \phi(q, \dot{q}, t) \end{aligned} \tag{7}$$

Darin ist ϵ ein "infinitesimaler Parameter", d. h. wir werden höhere Potenzen von ϵ vernachlässigen.

Beispiel: für eine Zeitverschiebung ist $t^* = t + \epsilon$, d. h. es wird in (7) $\psi = 0$ und $\phi = 1$ gesetzt. Die transformierte Bahnkurve ist $q^*(t) = q(t)$ und muss als Funktion von t^* geschrieben werden: $q^*(t^*) = q(t^* - \epsilon)$.

Nun wird angenommen, dass die Wirkung sich nicht ändert, d. h. dass

$$S^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} L(q^*, \mathrm{d}q^*/\mathrm{d}t^*, t^*)\mathrm{d}t^* = S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \mathrm{d}q/\mathrm{d}t, t)\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Nun liegt es nahe, wieder die Änderung in erster Potenz von ϵ zu berechnen.

$$S^* - S = \int_{t_1}^{t_2} \epsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left(L(q^*, \mathrm{d}q^*/\mathrm{d}t^*, t^*) \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} \right)_{\epsilon=0} \mathrm{d}t. \tag{9}$$

Da das für eine Transformation einer beliebigen Trajektorie gelten soll, muss der Integrand selbst verschwinden, d. h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left(L(q^*, \mathrm{d}q^*/\mathrm{d}t^*, t^*) \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} \right)_{\epsilon=0} = 0. \tag{10}$$

Beachte: an dieser Form sieht man, dass die Bedingung nicht nur Invarianz der Lagrangefunktion bedeutet, sondern dass, sobald die Zeit ebenfalls verändert wird, auch der Faktor $\mathrm{d}t^*/\mathrm{d}t$ eine Rolle spielt! Es ist eben die Wirkung invariant, nicht die Lagrangefunktion selbst (wenn die Zeit unverändert bleibt, also bei rein räumlichen Transformationen, genügt es, die Lagrangefunktion alleine zu betrachten).

Jetzt sind die konkreten Formen einzusetzen: aus (7) folgt zunächst (alles bis auf erste Ordnung in ϵ):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} &= 1+\epsilon\frac{d\phi}{dt} \\
\frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*} &= \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^*} = \left(\dot{q}+\epsilon\dot{\psi}\right)\left(1-\epsilon\dot{\phi}\right) = \dot{q}+\epsilon\dot{\psi}-\epsilon\dot{q}\dot{\phi}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Damit wird nun die Bedingung für die Invarianz zu

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left[L\left(q+\epsilon\psi,\dot{q}+\epsilon\dot{\psi}-\epsilon\dot{q}\dot{\phi},t+\epsilon\phi\right)\left(1+\epsilon\dot{\phi}\right)\right]_{\epsilon=0} \\
&= \frac{\partial L}{\partial q}\psi+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\psi}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\dot{\phi}+\frac{\partial L}{\partial t}\phi+L\dot{\phi} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\psi\right)+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)\dot{\phi}+\phi\frac{\partial L}{\partial t}=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Der Term in der zweiten Klammer ist $-H$, und aus der Ableitung der Energieerhaltung haben wir schon $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$. Somit kann folgende Umrechnung

$$\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)\dot{\phi} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H\phi)+\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{t}}\phi = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H\phi)-\frac{\partial L}{\partial t}\phi, \tag{13}$$

und aus der Invarianzbedingung wird

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left(L(q^*,\mathrm{d}q^*/\mathrm{d}t^*,t^*)\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\right)_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\psi+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)\phi\right] \tag{14}$$

Das ist das *Noether-Theorem.* Wenn die Wirkung unter einer Transformation der Koordinaten und der Zeit invariant ist, so gibt es eine Erhaltungsgröße

$$Q=Q(q,\dot{q},t)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\psi+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)\phi. \tag{15}$$

Da bei der Ableitung (an der Stelle, wo $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ eingesetzt wurde) die Bewegungsgleichungen verwendet wurden, gilt die Erhaltung nur für die wirklichen Bahnen des Systems.

Zur Ergänzung: bei mehreren generalisierten Koordinaten wird daraus

$$Q=Q(q_1\ldots q_s,\dot{q}_1\ldots q_s,t)=\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\psi_i+\left(L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\phi. \tag{16}$$

Nach dieser schwierigen Ableitung sind Beispiele nötig:

- Für eine reine Zeitverschiebung — das entspricht der Bedingung — $\partial L/\partial t=0$ — ist, wie oben gesagt, $\psi=0$ und $\phi=1$. Aus dem Noetherschen Theorem sieht man sofort durch Einsetzen die Erhaltung von

$$-H=L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}. \tag{17}$$

- Für eine räumliche Verschiebung — die Koordinate q ist zyklisch — wird $\phi=0$ und $\psi=1$ und man erhält sofort die Erhaltungsgröße $p=\partial L/\partial\dot{q}$.

- Die Lagrangefunktion

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)-\frac{m}{2}\omega^2\left(q_1^2+q_2^2\right) \tag{18}$$

ist invariant unter der infinitesimalen Drehung

$$q_1 \to q_1 - \epsilon q_2, \quad q_2 = \epsilon q_1 + q_2, \quad \text{also} \quad \psi_1 = -q_2, \quad \psi_2 = q_1, \quad \phi = 0, \tag{19}$$

so dass die Erhaltungsgröße zu

$$Q = -q_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + q_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1 p_2 - q_2 p_1, \tag{20}$$

also zur Komponente des Drehimpulses senkrecht zur Ebene.

Man bracht nicht zu betonen, dass das Noether-Theorem auch für andere Symmetrien anwendbar ist und wegen seiner Allgemeinheit spielt es eine große Rolle vor allem in der modernen Feldtheorie.

4 Die Legendre-Transformation

Der Übergang vom Lagrange- zum Hamilton-Formalismus erfolgt über die sogenannte *Legendre-Transformation*. Da sie in der Physik auch anderswo auftaucht (z. B. in der Thermodynamik) und nicht ganz einfach zu verstehen ist, soll sie hier ausführlicher behandelt werden.

Der Ziel der Transformation ist, in der Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ die generalisierte Geschwindigkeit $\dot{q}$ zu ersetzen durch den generalisierten Impuls p. Das Schwierige daran ist, dass man dazu nicht einfach über die Beziehung $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ die Variable in L ersetzen darf: das würde zu einem Verlust an Information führen.

Bevor das geklärt wird, schreiben wir das Problem allgemeinder: in einer Funktion $f(x)$ soll die Variable x durch $u = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ ersetzt werden.

Was ist mit "Verlust an Information" gemeint? Verschiedene Funktionen können zu derselben transformierten führen. Ein Beispiel (s. Nolting): Man vergleiche

$$L(x) = ax^2 \;\to\; u = 2ax \;\to\; x = u/(2a) \;\to\; L(u) = u^2/(4a) \tag{21}$$

mit

$$L(x) = a(x+b)^2 \;\to\; u = 2a(x+b) \;\to\; x = u/(2a) - b \;\to\; L(p) = u^2/(4a). \tag{22}$$

Die beiden verschiedenen Funktionen ergeben also tatsächlich dieselbe transformierte Version und es wäre etwa unmöglich, aus dem transformierten L das ursprüngliche wiederherzustellen. Es muss also ein anderes Verfahren her.

4.1 Kurz und bündig

Diese wird in den meisten Büchern gegeben. Man schreibt das Ganze differentiell,

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

Wenn man nun eine Funktion g über

$$g = ux - f \tag{24}$$

bildet, so wird

$$\mathrm{d}g = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u - \mathrm{d}f = x\,\mathrm{d}u, \tag{25}$$

so dass g eine Funktion von u wird und — sehr wichtig — $x = \mathrm{d}g/\mathrm{d}u$. Rückwärts geht es genauso:

$$f = ux - g, \quad \mathrm{d}f = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u - \mathrm{d}g = u\,\mathrm{d}x \tag{26}$$

Das sieht nach der Möglichkeit einer Rücktransformation aus, da man so aus der neuen Funktion g, die ja nur von u etwas weiss, das alte Argument x wiederherstellen kann.