# 12. Vorlesung Sommersemester

## 1 Weitere Variationsprinzipien

### 1.1 Das Prinzip von Maupertuis

Es wird auch "Prinzip der kleinsten Wirkung"genannt. Die Wirkung wird in diesem Fall als

$$A = \int_{t_1}^{t_2} p\dot{q}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

definiert und für ihre Variation $\Delta A$ gilt, dass sie bei konservativen Systeme für die tatsächlich durchlaufene Bahn verschwindet.

Dabei ist die Variation "$\Delta$" anders auszuführen als die Variationen bisher. Auf allen in der Variation betrachteten Phasenraumtrajektorien soll $H$ konstant gehalten werden, aber andererseits sind die Anfangs- und Endzeit $t_1$, $t_2$ nicht fest. Es wird also suzusagen beifester Energie der Bewegung die Zeitdauer dafür variiert, während im Hamiltonschen Prinzip die Zeit festgehalten wird und dafür die Energieerhaltung für die variierten Bahnen nicht mehr gewährleistet ist — erst die Lösung des Variationsproblems hat wieder eine feste Energie).

Das Prinzip von Maupertuis ist äquivalent zum Hamiltonschen Prinzip (allerdings ist es nur für konservative Systeme formuliert).

### 1.2 Das Fermat'sche Prinzip

Für eine kräftefreie Bewegung, also für $V$ konstant gilt

$$p\dot{q} = 2T = const. \tag{2}$$

und damit kann das Prinzip von Maupertuis umformuliert werden zu

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p\dot{q}\ \mathrm{d}t = 2T\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = 2T\Delta(t_2 - t_1) \tag{3}$$

Es wird also die kürzeste (oder u. U. auch längste) Zeit für die Bewegung gewählt.

Speziell für einen Massenpunkt ist $v = const.$ und damit kann man umrechnen

$$v\Delta \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t = \Delta \int_{t_1}^{t_2} v\ \mathrm{d}t = \text{Länge der Bahnkurve}, \tag{4}$$

so dass das *Prinzip des kürzesten Weges* resultiert. Ein kräftefreies Teilchen folgt also der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten, der *Geodäte*. Im gekrümmten Raum der allgemeinen Relativitätstheorie ist dies die Grundlage für die Bewegungsgleichung.

## 2 Räume der Mechanik

Zunächst noch ein kurzes Resumee der Beschreibungsarten mechanischer Systeme. Es gibt den

1. *Konfigurationsraum:* der Raum der generalisierten Koordinaten. Jeder mögliche Zustand entspricht einem Punkt, und eine Bewegung des Systems entspricht einer Kurve in diesem Raum. Die Zukunft des Systems liegt nur fest, wenn man außer dem Anfangspunkt auch die Anfangsgeschwindigkeit festlegt.

2. *Ereignisraum:* der Raum der generalisierten Koordinaten mit der Zeit als zusätzlicher Koordinate. In ihm ist nicht nur die Form der Bahn, sondern auch der zeitliche Ablauf darstellbar. Die Zukunft ist eindeutig bestimmt, wenn man zwei Punkte der Kurve in diesem Raum kennt (nach dem Variationsprinzip).

3. *Phasenraum:* der Raum, der von den generalisierten Koordinaten *und* Impulsen aufgespannt wird. Ein Punkt hierin legt auch die zukünftige Entwicklung fest.

4. *Zustandsraum:* der Phasenraum mit der Zeit als zusätzlicher Koordinate. Die Angabe eines Punktes legt die daraus hervorgehende Entwicklung des Systems eindeutig fest.

Die beiden Darstellungen 1 und 2 gehören zur Lagrangeformulierung, während 3 und 4 dem Hamilton-Formalismus zuzuordnen sind.

# 3 Die Poisson-Klammern

Auf eine noch allgemeinere Formulierung der Mechanik führt folgene Überlegung: jede Größe, die das mechanische System charakterisiert, ist als eine Funktion der generalisierten Koordinaten und Impulse sowie ggf. der Zeit darstellbar. Um in Zukunft einfacher schreiben zu können, wird die Schreibweise

$$q_1, q_2, \dots q_s \to \mathbf{q}, \qquad p_1, p_2, \dots p_s \to \mathbf{p} \tag{5}$$

(an der Tafel stattdessen unterstrichen) eingeführt. Bei den partiellen Ableitungen kann aber natürlich weiterhin mit der Summe gearbeitet werden, einfacher und an späteres gewöhnend ist es aber, auch hier die vektorielle Notation mit einem Skalarprodukt im $s$-dimensionalen Raum einzuführen, z. B.

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k \to \nabla_{\mathbf{q}} H \cdot \dot{\mathbf{q}}. \tag{6}$$

Gerüstet mit diesen Vereinfachungen wird jetzt die Zeitableitung einer beliebigen Eigenschaft $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{7}$$

Wenn man jetzt die Hamiltonschen Gleichungen in vektorieller Form benutzt,

$$\dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H, \qquad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \tag{8}$$

so wird daraus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H - \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \nabla_{\mathbf{q}} H + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{9}$$

Hierin führt man die *Poisson-Klammer* ein. Allgemein ist sie für Funktionen $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ und $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ definiert als

$$\{f, g\}_{\mathbf{qp}} = \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} g - \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \nabla_{\mathbf{q}} g = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k}, \tag{10}$$

wobei auch noch einmal die Summenschreibweise angegeben wurde. Wichtig ist der Index an den geschweiften Klammern: er gibt an, nach welchen kanonischen Variablen $\mathbf{q}$ und $\mathbf{p}$ differenziert wird.

Aus der Zeitentwicklungsgleichung (7) wird damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f = \{f, H\}_{\mathbf{qp}} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{11}$$

Für die generalisierten Koordinaten und Impulse sieht man sofort die *fundamentalen Poissonklammern*

$$\{q_k, q_l\}_{\mathbf{qp}} = 0, \quad \{p_k, p_l\}_{\mathbf{qp}} = 0, \quad \{q_k, p_l\}_{\mathbf{qp}} = \delta_{kl}, \tag{12}$$

die einfach aus den trivialen Beziehungen

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0, \quad \frac{\partial p_k}{\partial q_l} = 0, \quad \frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial p_l} = \delta_{kl} \tag{13}$$

folgen.

# 4 Invarianz der Poissonklammern

Physikalisch liegt es nahe, dass die Zeitentwicklung einer Eigenschaft des Systems nicht von den verwendeten Koordinaten abhängen sollte, so dass die Poissonklammer unabhängig von den verwendeten kanonischen Koordinaten $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ bzw. $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ sein sollte und man den Index weglassen darf:

$$\{f, g\}_{\mathbf{qp}} = \{f, g\}_{\mathbf{QP}} = \{f, g\}\,. \tag{14}$$

Der Beweis ist hier nur für den Fall, dass die Umrechnung zwischen den Koordinaten nicht von der Zeit abhängt, kurz dargestellt. Zunächst zeigt man, dass die fundamentalen Poissonklammern invariant sind.

*Seien zwei kanonische Variablensätze* $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ *bzw.* $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ *für dasselbe System gegeben, d. h. sie gehen aus derselben Lagrangefunktion hervor, aus der man auf die übliche Art den konjugierten Impuls bestimmt und die Hamiltonfunktion ableitet.* Wir bezeichnen die umgerechnete Hamiltonfunktion mit

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H\left(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\right), \tag{15}$$

sowie umgekehrt

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{H}\left(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\right). \tag{16}$$

*Dann gilt*

$$\{Q_k, Q_l\}_{\mathbf{qp}} = 0, \quad \{P_k, P_l\}_{\mathbf{qp}} = 0, \quad \{Q_k, P_l\}_{\mathbf{qp}} = \delta_{kl}. \tag{17}$$

Zum Beweis berechnet man die Zeitableitung einer Koordinate und versucht, auf den anderen Satz umzurechnen:

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\
&= \nabla_{\mathbf{q}} Q_i \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{p}} Q_i \cdot \dot{\mathbf{p}} \\
&= \nabla_{\mathbf{q}} Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H - \nabla_{\mathbf{p}} Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{q}} H \qquad (18) \\
&= \nabla_{\mathbf{q}} Q_i \cdot \sum_l \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \nabla_{\mathbf{p}} Q_l - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \nabla_{\mathbf{p}} P_l \right) \qquad (19) \\
&\quad - \nabla_{\mathbf{p}} Q_i \cdot \sum_l \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \nabla_{\mathbf{q}} Q_l - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \nabla_{\mathbf{q}} P_l \right) \\
&= \sum_l \left[ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \left( \nabla_{\mathbf{q}} Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{p}} Q_l - \nabla_{\mathbf{p}} Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{q}} Q_l \right) \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l}\left(\nabla_{\mathbf{q}} Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{p}} P_l - \nabla_{\mathbf{p}} Q_i \cdot \nabla_{\mathbf{q}} P_l\right)\Big] \\
= & \sum_l \left[-\dot{P}_l \{Q_i, Q_l\}_{\mathbf{qp}} + \dot{Q}_l \{Q_i, P_l\}_{\mathbf{qp}}\right].
\end{aligned}
$$

Darin wurden folgende Umformungen gemacht: von der zweiten zur dritten Zeile wurden die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen eingesetzt, von der dritten zur vierten gemäß Gl. (16) $H$ durch $\tilde{H}$ ersetzt und die Kettenregel benutzt, um die Ableitungen nach $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ einzuführen, von der vierten zur fünften umsortiert, und schließlich in der letzten Zeile die Definition der Poissonklammern eingesetzt.

Wenn man die linke Seite mit der letzten Umformung vergleicht, so muss

$$
\{Q_i, Q_l\}_{\mathbf{qp}} = 0, \quad \{Q_i, P_l\}_{\mathbf{qp}} = \delta_{il} \tag{20}
$$

gelten. Dieselbe Rechnung für den generalisierten Impuls durchgeführt liefert die noch fehlende fundamentale Poissonklammer.

Damit kann jetzt bewiesen werden: **Der Wert einer Poissonklammer ist unabhängig von dem Satz kanonischer Koordinaten und Impulse, mit denen sie berechnet wurde**.

Beweis: unter denselben Annahmen wie oben und mit denselben Mitteln schreiben wir jetzt eine allgemeine Poissonklammer um:

$$
\begin{aligned}
\{f, g\}_{\mathbf{qp}} &= \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} g - \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \nabla_{\mathbf{q}} g \\
&= \nabla_{\mathbf{q}} f \cdot \sum_l \left(\frac{\partial g}{\partial Q_l} \nabla_{\mathbf{p}} Q_l + \frac{\partial g}{\partial P_l} \nabla_{\mathbf{p}} P_l\right) \\
&\quad - \nabla_{\mathbf{p}} f \cdot \sum_l \left(\frac{\partial g}{\partial Q_l} \nabla_{\mathbf{q}} Q_l + \frac{\partial g}{\partial P_l} \nabla_{\mathbf{q}} P_l\right) \\
&= \sum_l \left[\frac{\partial g}{\partial Q_l} \{f, Q_l\}_{\mathbf{qp}} + \frac{\partial g}{\partial P_l} \{f, P_l\}_{\mathbf{qp}}\right].
\end{aligned} \tag{21}
$$

Wenn man hierin speziell $f = Q_i$ setzt, wird daraus

$$
\{Q_i, g\}_{\mathbf{qp}} = \sum_l \frac{\partial g}{\partial P_l} \delta_{il} = \frac{\partial g}{\partial P_i} \tag{22}
$$

und für $f = P_i$ entsprechend

$$
\{P_i, g\}_{\mathbf{qp}} = -\sum_l \frac{\partial g}{\partial Q_l} \delta_{il} = -\frac{\partial g}{\partial Q_i}. \tag{23}
$$

Da $f$ und $g$ beliebig sind, kann man diese Formeln auch dazu benutzen, um

$$
\{f, Q_l\}_{\mathbf{qp}} = -\{Q_l, f\}_{\mathbf{qp}} = -\frac{\partial f}{\partial P_l}, \qquad \{f, P_l\}_{\mathbf{qp}} = -\{P_l, f\}_{\mathbf{qp}} = \frac{\partial f}{\partial Q_l} \tag{24}
$$

oben in der letzten Zeile von Gl. (21) einzusetzen. Daraus wird dann

$$
\{f, g\}_{\mathbf{qp}} = \sum_l \left[-\frac{\partial g}{\partial Q_l}\frac{\partial f}{\partial P_l} + \frac{\partial g}{\partial P_l}\frac{\partial f}{\partial Q_l}\right] = \{f, g\}_{\mathbf{QP}}. \tag{25}
$$

Damit ist das Ziel erreicht: es gilt

$$
\{f, g\}_{\mathbf{qp}} = \{f, g\}_{\mathbf{QP}} = \{f, g\}. \tag{26}
$$

In Zukunft kann also weggelassen werden, in welchen Koordinaten und Impulsen die Poissonklammer berechnet wird.