13. und 14. Vorlesung Sommersemester

1 Eigenschaften der Poissonklammern

Die Poissonklammern haben folgende allgemeinen Eigenschaften:

1. Antisymmetrie
$$\{f,g\} = -\{g,f\} \quad \Longrightarrow \quad \{f,f\} = 0 \tag{1}$$

2. Linearität in beiden Funktionen
$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1, g\} + c_2\{f_2, g\} \tag{2}$$

3.
$$\{c, f\} = 0 \quad \text{für c konstant} \tag{3}$$

4. Produktregel
$$\{f, gh\} = h\{f,g\} + g\{f,h\} \tag{4}$$

5. Jacobi-Identität (ohne Beweis).
$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0 \tag{5}$$

Zeitentwicklung von Größen f:
$$\frac{df}{dt} = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{6}$$
f ist Erhaltungsgröße, wenn $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ und $\{f,H\} = 0$

Insbesondere ist trivial $\{H,H\} = 0$. Diese Formulierung der Erhaltungssätze enthält keinerlei Koordinaten mehr und ist somit auf einer höheren Ebene gegeben.

2 Zusammenhang mit der Quantenmechanik

In der Quantenmechanik sind meßbare Größen Operatoren, z. B. werden der Impuls und der Ort eines Teilchens durch einen Multiplikationsoperator bzw. eine Ableitung wiedergegeben:
$$\hat{p}_x = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad \hat{x} = x \tag{7}$$
Diese Operatoren wirken auf sog. Wellenfunktionen. Der *Kommutator* zweier Operatoren ist als
$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{8}$$
definiert. Er erfüllt alle die Eigenschaften der Poissonklammer von oben! Auch den fundamentalen Poissonklammern von Ort und Impuls entsprechen die Kommutatoren bis auf einen Faktor:
$$[\hat{x},\hat{x}] = 0, \qquad [\hat{p}_x,\hat{p}_x] = 0, \qquad [\hat{x},\hat{p}_x] = \mathrm{i}\hbar. \tag{9}$$

Letzteres errechnet man aus

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = -\mathrm{i}\hbar x\frac{\partial}{\partial x} - \left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x = -\mathrm{i}\hbar x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\hbar + \mathrm{i}\hbar x\frac{\partial}{\partial x} = \mathrm{i}\hbar, \tag{10}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass die Operatoren ja vor einer Funktion zu denken sind, auf die sie wirken:

$$\frac{\partial}{\partial x}x\, f(x) = f(x) + x\frac{\partial}{\partial x}f \tag{11}$$

Also ist die Analogie, die die Quantenmechanik nach Heisenberg aufbaut, durch

$$\{f, g\} \sim \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{f}, \hat{g}] \tag{12}$$

gegeben.

3 Ein Beispiel für Poissonklammern

Nehmen wir für das Pendel für die generalisierte Koordinate q den Ablenkwinkel und als $Q = l\cos q$ den Abstand zum Aufhängepunkt (das ist nur auf einer Seite eindeutig, was aber die Überlegungen hier nicht stört). Ziel ist zu zeigen, dass $\{Q, P\}_{\mathbf{qp}} = \{Q, P\}_{\mathbf{QP}} = 1$. Zunächst notiert man

$$\dot{Q} = -l\sin q\,\dot{q}, \quad \dot{q} = -\frac{\dot{Q}}{\sqrt{l^2 - Q^2}}. \tag{13}$$

Damit wird die kinetische Energie in den beiden Koordinaten

$$T = \frac{m}{2}l^2\dot{q}^2 = \frac{m}{2}\frac{l^2\dot{Q}^2}{l^2 - Q^2}, \tag{14}$$

und die Lagrangefunktion $L = T - V$ enthält im Potential nur noch eine Abhängigkeit von der Koordinate, was weiter keine Rolle spielt.

Die kanonisch konjugierten Impulse werden

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2\dot{q} \quad \to \quad \dot{q} = \frac{p}{ml^2} \tag{15}$$

und

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \frac{ml^2\dot{Q}}{l^2 - Q^2} \quad \to \quad \dot{Q} = \frac{P}{ml^2}(l^2 - Q^2). \tag{16}$$

Für die Berechnung der Poissonklammer müssen Q und P als Funktionen von q und p ausgedrückt werden. Für Q ist das in der Definition gegeben, für P rechnet man:

$$P = \frac{ml^2\dot{Q}}{l^2 - Q^2} = -\frac{ml\dot{q}}{\sin q} = -\frac{p}{l\sin q}. \tag{17}$$

Damit kann jetzt die Poissonklammer berechnet werden:

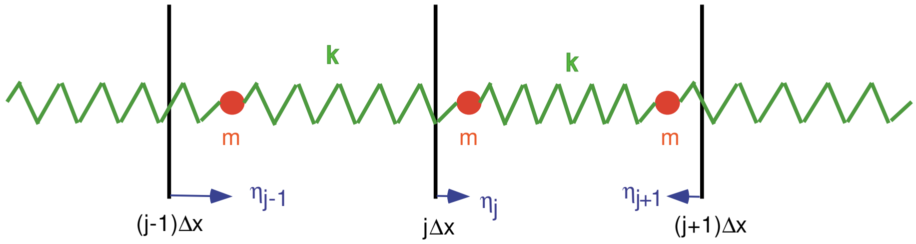
$$\{Q, P\}_{\mathbf{qp}} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (-l\sin q)\frac{-1}{l\sin q} - 0 = 1. \tag{18}$$

Das ist das gewünschte Resultat.

Die anderen Poissonklammern $\{Q, Q\}$ und $\{P, P\}$ verschwinden trivial wegen der Antisymmetrie der Poissonklammer.

4 Klassische Feldtheorie

Als Einführung in die Mechanik kontinuierlicher Systeme sei hier das Beispiel des logitudinal schwingenden Stabes behandelt. Wir werden den Stab zunächst in eine Reihe von Punktmassen zerlegen und dann im Grenzwert aus diesen ein Kontinuum machen.



Zerlegung eines schwingenden Stabes in diskrete, durch Fredern gekoppelte Punktmassen. Die Größen η_j geben die Auslenkung aus der jeweiligen Ruhelage $x_j = j\,\Delta x$ wieder.

Zerlegung des Stabes: die Gesamtlänge L wird in N Intervalle $\Delta x = L/N$ eingetielt. An jedem Punkt $x_j = j\,\Delta x$ sitzt eine Masse $m = M/N$ (M Gesamtmasse), die in Richtung des Stabes schwingen kann; die Auslenkung sei $\eta_j(t)$. Wenn man die rücktreibenden Kräfte, wie es naheliegt, durch harmonische Oszillatoren mit Federkonstante k modelliert, werden kinetische und potentielle Energie zu

$$T = \sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2}\dot{\eta}_j^2, \qquad V = \sum_{j=1}^{N} \frac{k}{2}(\eta_{j+1} - \eta_j)^2 \tag{19}$$

Was an den Endpunkten passiert, hängt von der Randbedingung ab; es wird sich aber zeigen, dass man an dieser Stelle sich noch nicht groß darum kümmern muss.

Dass die Kraft auf Teilchen k korrekt wiedergegeben wird, sieht man durch Ableiten des Potentials:

$$F_k = -\frac{\partial V}{\partial \eta_k} = +k(\eta_{k+1} - \eta_k) - k(\eta_k - \eta_{k-1}) = k(\eta_{k+1} - 2\eta_k + \eta_{k-1}). \tag{20}$$

Bei der Berechnung beachte man, dass der Index k in der Summe zweimal auftaucht, nämlich für $j = k$ und $j = k - 1$.

Die Lagrange-Funktion ist jetzt also

$$L = \sum_j \frac{m}{2}\dot{\eta}_j^2 - \sum_j \frac{k}{2}(\eta_{j+1} - \eta_j)^2. \tag{21}$$

Um jetzt den Übergang zum Kontinuum, also $N \longrightarrow \infty$ durchzuführen, muss man überlegen, was dabei fest bleibt. Die Amplitude der Schwingungen η_j wird sich nicht verändern, dagegen aber gehen m und Δx gegen Null, aber so dass die lineare Massendichte

$$\mu = \frac{m}{\Delta x} = \frac{M/N}{L/N} = \frac{M}{L} \tag{22}$$

konstant bleibt. Damit wird aus der kinetischen Energie im Grenzwert

$$T = \sum_j \frac{m}{2}\dot{\eta}_j^2 = \Delta x \sum_j \frac{\mu}{2}\dot{\eta}_j^2 \to \int \mathrm{d}x \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2. \tag{23}$$

Zu beachten ist, dass im Kontinuumsfall aus der Ablenkung $\eta_j(t)$, die an der Stelle x_j definiert ist, die Funktion zweier Variablen $\eta(x,t)$ wird. *x ist also kein Freiheitsgrad des Systems,* *sondern es zählt diese ab: es entspricht im Grenzwert dem Index j!* Die generalisierten Koordinaten, die Freiheitsgrade, sind jetzt die kontinuierlich vielen Werte von $\eta(x, t)$ an allen Punkten x.

Für das Potential ist die Frage zu beantworten, wie sich die Federkonstante k verhält, wenn man die Abstände der Massen schrumpfen lässt. Dazu zerlegen wir in Gedanken eine Feder der Länge L mit Federkonstante k in zwei Federn der Länge $L/2$ und Federkonstante k'. Wenn eine Kraft F wirkt, verlängert sich die Feder um $\Delta L = F/k$. Die beiden Hälften tragen jeweils dazu die Hälfte bei: $\Delta L/2 = F/k'$. Aus beiden Beziehungen folgt $k' = 2k$, oder anders formuliert, der *Young'sche Modul*

$$Y = k\,\Delta x \tag{24}$$

der Federn ist unabhängig von der Länge der Einzelfedern. Damit lässt sich jetzt auch das Potential im Grenzwert in eine Integral verwandeln:

$$V = \sum_j \frac{k}{2}(\eta_{j+1} - \eta_j)^2 = \Delta x \sum_j \frac{1}{2}\, k\Delta x\, \frac{(\eta_{j+1} - \eta_j)^2}{\Delta x^2} \longrightarrow \int \mathrm{d}x \frac{Y}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \tag{25}$$

Dabei wurde der Grenzwert des Differenzenquotienten eingesetzt:

$$\frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{\Delta x} = \frac{\eta(x_{j+1} - \eta(x_j)}{\Delta x} = \frac{\eta(x_j + \Delta x) - \eta(x_j)}{\Delta x} \longrightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{26}$$

Damit wird die Lagrange-Funktion zu

$$L = \int \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right], \tag{27}$$

ist also ein Integral über eine (lineare) *Lagrange-Dichte*

$$L = \int \mathrm{d}x\, \mathcal{L}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, t\right). \tag{28}$$

Hier wurde angegeben, wovon die Lagrangedichte abhängen kann; in unserem einfachen Fall ist sie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{29}$$