15. Vorlesung Sommersemester

1 Kontinuumsgrenzfall der Bewegungsgleichungen

Was wird aus den Bewegungsgleichungen im Kontinuumsgrenzwert? Im diskreten Fall sind diese

$$m\ddot{\eta}_j = k(\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}) \tag{1}$$

und man führt wieder Faktoren Δx ein, bis vernünftige Grenzwerte herauskommen:

$$\frac{m}{\Delta x}\ddot{\eta}_j = (k\Delta x)\frac{(\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1})}{\Delta x^2}. \tag{2}$$

Daraus wird für $\Delta x \to 0$

$$\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = Y\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Die Bewegungsgleichung ist also jetzt eine *partielle Differentialgleichung*.

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (2) ist bekannt als Differenzennäherung für die zweite Ableitung, wie man leicht selbst konstruieren kann:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - f'\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \end{aligned} \tag{4}$$

2 Das Hamiltonsche Prinzip für Felder

Es ist jetzt relativ einfach, das Hamiltonsche Variationsprinzip auf Felder zu übertragen. In die ursprüngliche Version

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\ \mathrm{d}t = 0 \tag{5}$$

setzt man die Lagrangedichte über

$$L = \int \mathrm{d}x\ \mathcal{L}\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}, \frac{\partial\eta}{\partial x}, t\right) \tag{6}$$

ein und erhält

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\ \int \mathrm{d}x\ \mathcal{L} = 0 \tag{7}$$

Dabei ist wieder das feld an der Anfangs- und Endzeit festzuhalten, aber an den räumlichen Grenzen ist nichts vorgeschrieben.

Im dreidimensionalen Raum geht es analog mit dem Feld $\eta(x,y,z,t)$: die Lagrangedichte hängt von allen Ableitungen ab,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, t\right), \tag{8}$$

die Lagrangefunktion wird zu einem dreidimensionalen Integral und damit erhält das Variationsprinzip eine vierdimensionale Integration

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int d^3r\, \mathcal{L} = 0. \tag{9}$$

Diese Formulierung der Mechanik eignet sich also hervorragend als Grundlage für eine relativistische Theorie und ist auch aus diesem Grunde sehr wichtig in der *relativistischen Quantenfeldtheorie* zur Beschreibung der Elemetarteilchen.

Im weiteren wird der Einfachheit halber mit dem eindimensionalen Fall gearbeitet; der dreidimensionale lässt sich aber daraus leicht ableiten.

3 Ableitung der Bewegungsgleichungen

Die Ausführung der Variation und damit die Ableitung der Bewegungsgleichung geht in Anlehnung an den Fall der Euler-Lagrange-Gleichungen verblüffend einfach. Man variiert das Feld

$$\eta(x,t) \rightarrow \eta(x,t) + \delta\eta(x,t), \tag{10}$$

womit auch die räumliche und zeitliche Ableitung bestimmt sind:

$$\begin{array}{ccl} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \rightarrow & \frac{\partial \eta}{\partial x} + \delta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\delta\eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} & \rightarrow & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\delta\eta \end{array} \tag{11}$$

In erster Ordnung wird die Variation des Integrals also gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta \quad & \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x\, \mathcal{L} \\ = \quad & \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x \left[\mathcal{L}\left(\eta + \delta\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\delta\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\delta\eta, t\right) - \mathcal{L}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, t\right)\right] \\ = \quad & \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right)}\frac{\partial}{\partial t}\delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)}\frac{\partial}{\partial x}\delta\eta\right] \end{aligned} \tag{12}$$

Die Näherung erster Ordnung ist dabei genau wie bei einer gewöhnlichen Funktion $f(x,y)$ zu verstehen, wo man

$$f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) \approx f + \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{13}$$

und somit

$$df = f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{14}$$

schreibt.

Die weiter Entwicklung geht wie gehabt: man führt sowohl im Ort wie auch in der Zeit partielle Intergrationen aus in den Termen, die Ableitungen danach enthalten. Zunächst für die Zeit:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} \frac{\partial \delta\eta}{\partial t} = \left[\int \mathrm{d}x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} \delta\eta\right]_{t_1}^{t_2} - \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} \delta\eta \tag{15}$$

wobei benutzt wird

$$\delta\eta(x, t_1) = 0, \quad \delta\eta(x, t_2) = 0. \tag{16}$$

Mit der räumlichen Ableitung geht es analog; man muss aber beim Weglassen der Randterme i. a. damit argumentieren, dass die Felder in großer Entfernung gegen Null gehen. Im Fall der schwingenden Saite ist das Argument dagegen, dass am Anfang und Ende der Saite die Auslenkung verschwindet, $\eta(0, t) = \eta(L, t) = 0$.

Damit resultiert

$$\delta \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x \mathcal{L} = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right] \delta\eta \tag{17}$$

Jetzt tritt $\delta\eta$ als Faktor im gesamten Integral auf, und da es beliebig ist, muss die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} = 0 \tag{18}$$

gelten. Sie sieht also immer noch ähnlich aus wie die Lagrangegleichung 2. Art, aber enthält zusätzliche Terme mit den Ortsableitungen des Feldes. Man sieht auch hier, dass sie einer relativistischen Beschreibung sehr entgegenkommt.

4 Dreidimensionaler Fall

In diesem Fall ist einfach nach mehreren Ortsableitungen zu differenzieren, und man erhält eine Summe der Beiträge der drei Richtungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)} = 0 \tag{19}$$

5 Beispiel

Als einfachstes beispiel betrachten wir die Lagrangedichte des schwingenden Stabes (oder der schwingenden Saite):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \tag{20}$$

Die Ableitungen werden zu

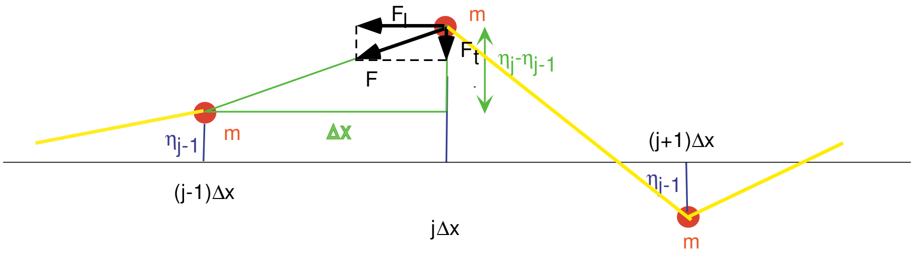
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} &= \mu \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} &= -Y \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \tag{21}$$

Somit wird die Bewegungsgleichung zu

$$-\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+Y\frac{\partial^2\eta}{\partial x}=0 \tag{22}$$

Diese Lagrangedichte ist sozusagen das Gegenstück zum harmonischen Oszillator in der Feldtheorie: die kinetische und potentielle Energie sind von zweiter Ordnung in der Geschwindigkeit bzw. Amplitude. Deswegen läuft mathematisch alles sehr ähnlich zum simplen Oszillator.

6 Die schwingende Saite



Zerlegung einer schwingenden Saite in diskrete gekoppelte Punktmassen. Die Größen η_j geben die Auslenkung aus der jeweiligen Ruhelage $x_j = j\,\Delta x$ wieder, jetzt aber transversal, also senkrecht zur Ruhelage der Saite. Entlang der Saite wirken überall Spannungskräfte.

Bei der schwingenden Saite sind die Geometrie und der physikalische Mechanismus etwas anders. Die Seite steht unter einer Spannung, die einer konstanten Kraft entlang der Saite entspricht, die auf jeden der Massenpunkte nach beiden Richtungen zieht. Durch eine seitliche Auslenkung erzeugt diese Spannung in der transversalen Richtung eine rücktreibende Kraft. Man betrachte im Bild die Kraft, die das Segment zwischen den Punkten $j-1$, j auf die Masse bei j ausübt. Die Fadenspannung F erzeugt eine transversale F_t und eine longitudinale F_l Kraftkomponente, für deren Größe man aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke abliest:

$$\begin{aligned} F_t &= -\frac{\eta_j-\eta_{j-1}}{\sqrt{\Delta x^2+(\eta_j-\eta_{j-1})^2}}\,F \approx -\frac{F}{\Delta x}(\eta_j-\eta_{j-1}) \\ F_l &= -\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+(\eta_j-\eta_{j-1})^2}}\,F \approx -F. \end{aligned} \tag{23}$$

Dabei ist die Näherung kleiner Auslenkungen benutzt worden.

Für den Beitrag des rechts davon gelegenen Saitenstücks rechnet man ganz analog

$$\begin{aligned} \tilde{F}_t &= -\frac{\eta_j-\eta_{j-1}}{\sqrt{\Delta x^2+(\eta_j-\eta_{j-1})^2}}\,F \approx -\frac{F}{\Delta x}(\eta_j-\eta_{j+1}) \\ \tilde{F}_l &= \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+(\eta_j-\eta_{j+1})^2}}\,F \approx F. \end{aligned} \tag{24}$$

und damit wird die resultierende Kraft longitudinal verschwinden, während die transversale zu

$$m\ddot{\eta}_j = F_t+\tilde{F}_t = \frac{F}{\Delta x}\left(\eta_{j-1}+2\eta_j-\eta_{j+1}\right) \tag{25}$$

wird. Da das exakt dieselbe Formel wie für den schwingenden Stab ist, lässt sich alles oben entwickelte übertragen.

7 Lösung der Bewegungsgleichung

7.1 Fortschreitende Wellenlösung

Die Gleichung (22) ist eine eindimensionale Form der *Wellengleichung* und beschreibt u. a. Lösungen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Um das zu sehen, betrachten wir Lösungen der Form

$$\eta(x,t) = f(x - vt) \tag{26}$$

mit einer konstanten Geschwindigkeit v. Was diese Gleichung eigentlich besagt, ist dass man eine (beliebige) Funktion $f(u)$ einer Variablen hat, wobei dann $u(x,t) = x - vt$ eine spezielle Funktion von x und t ist. Es ist nun

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \tag{27}$$

und für die Ableitungen von η rechnet man z. B.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = -v\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u} \tag{28}$$

und weiter

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}u^2}, \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}u^2}. \tag{29}$$

Einsetzen in (22) ergibt

$$\mu v^2 \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}u^2} = Y\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}u^2}. \tag{30}$$

Dies ist für beliebige f erfüllt, wenn v gleich der *Schallgeschwindigkeit* $v = \sqrt{Y/\mu}$ ist. Die Schallgeschwindigkeit ist also ähnlich wie beim Oszillator durch das Verhältnis von rücktreibender Kraft und Masse gegeben.

Was beschreibt die Lösung (26) physikalisch? Zur Zeit $t = 0$ hat die Auslenkung das Profil $f(x)$ und zu späteren Zeiten bleibt dieses in der Form erhalten, ist nur um die Strecke vt weitergelaufen. Die Lösung beschreibt also wirklich eine fortschreitende Welle.

7.2 Separation der Variablen

Zur Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = Y\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \tag{31}$$

ist oft ein *Separationsansatz*

$$\eta(x,t) = a(x)b(t) \tag{32}$$

erfolgreich. Das funktioniert so: Einsetzen ergibt

$$\mu a(x)b''(t) = Y a''(x)b(t). \tag{33}$$

Man trennt jetzt die Abhängigkeit von x und t:

$$\frac{\mu b''}{b} = \frac{Y a''}{a} = const. = C \tag{34}$$

Da die eine Seite der Gleichung nur von x und die andere nur von t abhängt, kann die Gleichung für alle x und t nur gültig sein, wenn beide gleich derselben Konstanten sind. Das ist das Wesen der Separation der Variablen in diesem Fall. Man erhält also zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\mu b'' = Cb, \qquad Y a'' = Ca \tag{35}$$

Das ist im wesentlichen die Oszillatorgleichung; ob sie periodische oder exponentielle Lösungen hat, folgt aus dem Vorzeichen von C. Im Ort ist die Randbedingung für eine schwingende Saite der Länge L: $a(0) = 0$ und $a(L) = 0$.

Damit kommt als Lösung nur

$$a(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{36}$$

in Frage, denn mit diesem Ansatz ist auch

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \text{ für } x = L. \tag{37}$$

C darf dann nur negative Werte haben, denn es gilt

$$Ca = Ya'' = -Y\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a \longrightarrow C = -Y\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \tag{38}$$

und die Gleichung für die Zeitabhängigkeit wird zu

$$b'' = -\frac{Y}{\mu}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b. \tag{39}$$

Wenn wir jetzt zur Abwechslung mal die komplexe Schreibweise für die Schwingungen verwenden, so sind die Lösungen für $b(t)$

$$b(t) = e^{\pm i\omega t} \qquad \text{mit} \qquad \omega = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}\,\frac{n\pi}{L}. \tag{40}$$

Der Wert von n unterscheidet verschieden Lösungen, die alle die Randbedingung im Ort erfüllen. Wenn wie jetzt noch Angangsbedingungen in der Zeit vorgeben, also $\eta(x, t = 0) = a(x)b(0) = \eta_0(x)$, sowie $\dot{\eta}(x, t = 0) = a(x)\dot{b}(0) = v_0(x)$, dann ist es natürlich im allgemeinen nicht möglich, diese mit einem einzigen Wert von n zu erfüllen, da ja dann nur die einfachen Sinusprofile nach (36) möglich wären. Man muss also eine Summe zulassen und setzt als allgemeine Lösung

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \left(c_{1n}e^{i\omega_n t} + c_{2n}e^{-i\omega_n t}\right) \tag{41}$$

an. Die Koeffizienten c_{1n} und c_{2n} erhält man aus den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \eta_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)(c_{1n} + c_{2n}), \\ v_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} i\omega \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)(c_{1n} - c_{2n}). \end{aligned} \tag{42}$$

Es handelt sich also um das Problem, vorgegebene beliebige Funktionen $\eta_0(x)$ bzw. $v_0(x)$ nach Basisfunktionen $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ zu zerlegen, das ist eine Form der *Fourier-Analyse*, die in der gesamten Physik eine große Rolle spielt. In der Elektrodynamik und Quantenmechanik wird dieses Thema extensiv behandelt werden, soll aber hier nicht weiter verfolgt werden.