

16. und 17. Vorlesung Sommersemester

1 Hamiltonformalismus für Felder

Auch diese Entwicklung geht völlig analog zum einfachen Fall der Punktteilchen. Man definiert den kanonisch konjugierten Impuls

$$\pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \quad (1)$$

und macht damit eine Legendre-Transformation zur Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \pi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \mathcal{L} \quad (2)$$

Damit resultieren die kanonischen Gleichungen für Felder

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \pi}{\partial t}, \quad (3)$$

die den gewöhnliche Hamiltonschen Gleichungen sehr ähneln.

2 Rückblick auf die analytische Mechanik

Hier sind noch einmal die wichtigsten Definitionen und Sätze zusammengestellt.

- Generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten

$$q_i, \dot{q}_i, \quad i = 1 \dots s \quad (4)$$

- Zwangsbedingungen: holonom, skleronom, rheonom
- d'Alembertsches Prinzip
- Lagrangefunktion $L = T - V$ mit der Abhängigkeit $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$
- Lagrange-Gleichung 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (5)$$

- Kanonisch konjugierter Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (6)$$

- Zyklische Koordinate:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i \text{ Erhaltungsgrösse} \quad (7)$$

- Legendre-Transformation und Hamilton-Funktion

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L \quad (8)$$

- Kanonische Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (9)$$

- Poissonklammer

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (10)$$

unabhängig von Koordinaten. Bewegungsgleichung

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (11)$$

3 Der starre Körper (rigid body)

Ein starrer Körper besteht aus Massenpunkten m_i , $i = 1 \dots N$ bei \vec{r}_i und ändert bei Bewegungen seine Form nicht. Die Anzahl der Massenpunkte in makroskopischen Körpern ist sehr groß, von der Größenordnung $N \sim 10^{23}$, wird aber durch die Zwangsbedingung eingeschränkt, dass die Abstände der Punkte sich niemals ändern:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = C_{ij} = \text{const. für alle } i, j = 1 \dots N \quad (12)$$

Dadurch hat er schließlich nur wenige Freiheitsgrade. Die Anzahl s erhält man durch Aufbau aus wenigen Punkten:

- Der Fall $N = 1$: ein einzelner Massenpunkt hat $s = 3$.
- Der Fall $N = 2$: das entspricht der früher besprochenen Hantel mit $s = 5$. Sie hat drei Freiheitsgrade der Translation und zwei der Richtung.
- Der Fall $N = 3$: der zusätzliche Massenpunkt bringt drei weitere Freiheitsgrade, die aber durch die zwei festen Abstände reduziert werden, es bleiben $s = 6$.
- $N \geq 4$: jeder weitere Punkt bringt im Prinzip drei weitere Freiheitsgrade, die aber durch das Festhalten der Abstände zu dreien der schon vorhandenen festgelegt sind. Es bleibt somit bei $s = 6$.

Wenn man also von den uninteressanten Sonderfällen $N = 1$ und $N = 2$ absieht, hat der starre Körper i. a. *6 Freiheitsgrade*.

Als Koordinaten werden im allgemeinen verwendet: für die Translation: 1 Punkt im Körper, normalerweise der Schwerpunkt, also 3 kartesische Koordinaten, und für die Rotation: 3 Winkel, meist die *Euler-Winkel*, die später eingeführt werden. Zwei davon beschreiben die Richtung einer Achse des Körpers analog zu den Winkeln θ und ϕ in Kugelkoordinaten, der dritte erlaubt es dann noch, den Körper um diese Achse zu drehen.

4 Physikalische Größen des starren Körpers

Einige wichtige physikalische Größen können leicht definiert werden:

- Die Gesamtmasse

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (13)$$

An dieser Stelle sollte auch die Kontinuumsdarstellung eingeführt werden. Da die Zahl N ja extrem groß werden kann, wird in den meisten Fällen eine kontinuierliche Massenverteilung angenommen. Dazu braucht man nur in allen Formeln die Substitution

$$\sum_i m_i \dots \rightarrow \int \rho(\vec{r}) d^3r \dots \quad (14)$$

mit der Massendichte $\rho(\vec{r})$ einzusetzen. Alle Eigenschaften der Teilchen gekennzeichnet durch Index i , sind dann durch Felder am Ort \vec{r} zu ersetzen. Für die Masse wird also

$$M = \int d^3r \rho(\vec{r}). \quad (15)$$

In allen folgenden Formeln werden beide angegeben. In vielen Lehrbüchern wird die Summenform vorgezogen, weil sie kürzer ist, in den meisten Anwendungen kommt aber das Integral zum Zuge.

- Schwerpunkt:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r}}{M} \quad (16)$$

- Impuls:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) \quad (17)$$

Man beachte, dass hier das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ vorkommt, das beschreibt, wie die Punkte des starren Körpers sich bewegen.

- Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}) \quad (18)$$

- Kinetische Energie

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} v_i^2 = \int d^3r \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})^2 \quad (19)$$

5 Bewegungsmöglichkeiten

Folgende Sonderformen spielen in der Praxis eine Rolle:

1. Rotation um eine fixe Achse,
2. Rotation um einen Punkt: das physikalische Pendel,
3. Völlig freie Bewegung.

6 Rotation um eine feste Achse

In diesem Fall wird der Körper gezwungen, um eine vorgeschriebene Achse zu rotieren. Ein Beispiel ist die Rotation eines Rades um seine Achse oder die einer Tür um die durch die Türangeln vorgegebene Achse. Ein Kreisel dagegen kann die Richtung der Drehachse selbst ändern. Da dieser Fall mathematisch einfacher ist, werden wir zunächst die feste Achse betrachten.

Wenn die Winkelgeschwindigkeit der Rotation $\vec{\omega}$ ist, wobei dieser Vektor natürlich in Richtung der Achse zeigt, dann ist das Geschwindigkeitsfeld im Körper durch

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \text{ bzw. } \vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (20)$$

gegeben.

Die kinetische Energie wird dann

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \quad (21)$$

Nun trägt vom Ortsvektor im Vektorprodukt nur der zu $\vec{\omega}$ senkrechte Anteil \vec{r}_\perp bei und der Betrag desselben wird

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}_i| = \omega |\vec{r}_{\perp i}| = \omega r_{\perp i}, \quad (22)$$

so dass die kinetische Energie zu

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \omega^2 r_{\perp i}^2 \right) \quad (23)$$

wird. ω kann nun herausgezogen werden in der Form

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 \quad (24)$$

mit dem *Trägheitsmoment*

$$\mathcal{J} = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 = \int d^3r \rho(\vec{r}) r_{\perp}^2. \quad (25)$$

Um die Bedeutung des Ausdruckes r_\perp zu verdeutlichen, sei dies noch einmal für den Fall gegeben, dass $\vec{\omega}$ z-Richtung hat:

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int d^3r \rho(\vec{r}) (x^2 + y^2) \quad (26)$$

Das Trägheitsmoment enthält also die durch die Dichte gewichtete Summe der quadratischen Abstände von der Drehachse. Das reflektiert einfach die Tatsache, dass eine Punktteilchen im Abstand r von der Drehachse den Beitrag $mr^2\omega^2/2$ zur kinetischen Energie leistet.

Ein alternativer Buchstabe für J ist Θ .

7 Beispiele

Für eine Kugel der Masse M , Radius R , mit homogener Dichte $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$ wird bei einer Drehung um eine Achse durch den Mittelpunkt

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \int d^3r \rho r^2 \sin^2 \theta = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{r=0}^R r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta r^2 \sin^2 \theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \times \int_0^R r^4 dr \times \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \\
&= 2\pi \rho \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} = \frac{2}{5} MR^2
\end{aligned}$$

wobei die Substitution

$$u = \cos \theta, \quad du = -\sin \theta d\theta \quad (27)$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta &= + \int_1^{-1} du (1 - u^2) \\
&= \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{+1} \\
&= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned} \quad (28)$$

benutzt wurden.

Für die Rotation eines Zylinders um seine Symmetrieachse rechnet man natürlich in Zylinderkoordinaten. Für die Dichte gilt

$$M = \rho \pi R^2 L \quad (29)$$

und das Trägheitsmoment wird zu

$$\begin{aligned}
J &= \int d^3r \rho r^2 = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz \int_0^R r dr r^2 \\
&= \rho 2\pi L \frac{R^4}{4} \\
&= \frac{1}{2} MR^2
\end{aligned} \quad (30)$$