

18. Vorlesung Sommersemester

1 Der Drehimpuls des starren Körpers

Der Drehimpuls des starren Körpers ist etwas komplizierter. Wenn wieder $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit um die feste Rotationsachse ist, so wird mit Hilfe des doppelten Vektorproduktes

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i r_i^2 \vec{\omega} - m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i].\end{aligned}\quad (1)$$

Das aufregende Neue dabei ist, dass $\vec{\omega}$ und \vec{L} nicht parallel sein brauchen. Sehen wir dazu ein einfaches Beispiel an, einen starren Körper aus drei Teilchen: sei $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ in z -Richtung und die drei Teilchen, jedes von ihnen mit Masse m , an den Orten $\vec{r}_1 = \vec{0}$, $\vec{r}_2 = \vec{e}_x$ und $\vec{r}_3 = \vec{e}_z$. In obigen Ausdruck eingesetzt gibt das einfach

$$\vec{L} = m\vec{\omega},\quad (2)$$

d. h. die Richtung von \vec{L} ist in diesem Fall immer noch parallel zu $\vec{\omega}$. Wenn wir aber das Teilchen 2 etwas schräg verschieben an die Stelle $\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$, wobei $|\vec{r}_2| = 1$ bleibt, so ist

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m\vec{\omega} - m \left[\omega \vec{e}_z \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z) \right] \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z) \\ &= \frac{1}{2}m\vec{\omega} - \frac{m}{2}\omega \vec{e}_x\end{aligned}\quad (3)$$

also nicht parallel zu $\vec{\omega}$!

Interessant ist, dass bei der Rotation um die z -Achse die Position des Teilchens 2 ebenfalls rotiert; damit rotiert aber auch der 2. Beitrag zum Drehimpuls. Das bedeutet: es muss ein Drehmoment wirken, das dazu dient, die Rotation um die z -Achse zu erhalten. Ein starrer Körper muss also i. a. durch *Lagerkräfte* gezwungen werden, die Rotationsachse einzuhalten.

Eine Ausnahme ist der Fall axialsymmetrischer oder spiegelsymmetrischer Körper: dann gibt es im zweiten Term von (1) immer zwei bezüglich der Drehachse gespiegelte Punkte, deren Beiträge sich aufheben.

2 Die Komponente von \vec{L} in Richtung von $\vec{\omega}$

Auch wenn der Drehimpuls selbst damit nicht voll beschrieben wird, kann man doch über die Komponente in Richtung der Drehachse einige Aussagen machen. Wir betrachten also diese Komponente

$$L_\omega = \frac{\vec{L} \cdot \vec{\omega}}{\omega} = \sum_{i=1}^N m_i \left(r_i^2 \frac{\omega^2}{\omega} - \frac{(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})^2}{\omega} \right)\quad (4)$$

Hierin ist

$$\sum_{i=1}^N m_i \omega \left(r_i^2 - \frac{(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})^2}{\omega^2} \right) = \sum_{i=1}^N m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega} = \mathcal{J} \omega, \quad (5)$$

so dass man einfach erhält

$$L_\omega = \mathcal{J} \omega, \quad (6)$$

es geht also nur der senkrechte Abstand zur Drehachse $\vec{r}_{i\perp}$ ein, so dass das Trägheitsmoment eingesetzt werden konnte.

3 Bewegungsgleichung für den Drehimpuls

Die Zeitableitung des Drehimpulses wird zu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}. \quad (7)$$

Hierin sind die äußeren Kräfte gemeint (die Kräfte zwischen den Bestandteilen des starren Körpers ändern äußern sich als Zwangskräfte nur darin, dass die Lage der Teilchen in ihm erhalten bleibt).

Die Komponente Richtung $\vec{\omega}$ ist nun

$$M_\omega = \frac{\vec{M} \cdot \vec{\omega}}{\omega} = \sum_i \frac{(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \cdot \vec{\omega}}{\omega} = \sum_i \frac{1}{\omega} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{\omega} \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_i r_{i\perp} \vec{e}_{\phi_i} \cdot \vec{F}_i \quad (8)$$

Hier wurde benutzt, dass bei der Kreisbewegung die Geschwindigkeit eines Teilchens über $\vec{v} = \omega \times \vec{r} = \omega \rho \vec{e}_\phi$ gegeben ist (Kreisbewegung in ebenen Polarkoordinaten). Dabei ist ϕ der Winkel um die Drehachse und ρ der Abstand zu ihr.

Damit wird

$$M_\omega = \sum_i r_{i\perp} \vec{e}_{\phi_i} \cdot \vec{F}_i = \dot{L}_\omega = \mathcal{J} \dot{\omega} = \mathcal{J} \ddot{\phi}. \quad (9)$$

Man beachte, dass \mathcal{J} konstant ist, da es sich bei der Drehung um die zugehörige Achse nicht ändert: die senkrechten Abstände zur Drehachse bleiben ja konstant.

4 Das physikalische Pendel

Das *mathematische Pendel* enthält eine Punktmasse, die durch einen masselosen faden aufgehängt ist. In der Realität besteht ein Pendel aus einer Verteilung von Masse, die man eher durch die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse beschreiben kann.

Sei das physikalische Pendel so fixiert, dass es um die z -Achse rotiert. Die x -Achse weise nach unten, so dass die Schwerkraft auf Massenpunkt m_i als

$$\vec{F}_i = (m_i g, 0, 0) \quad (10)$$

angegeben werden kann. Die Komponente des Drehmomentes in z -Richtung ist dann

$$M_{\omega_i} = -m_i g y_i \quad (11)$$

und das gesamte Drehmoment wird zu

$$M_\omega = \sum_i M_{\omega_i} = -g \sum_i m_i y_i = -M g R_y \quad (12)$$

mit R_y der y -Komponente des Schwerpunktes. Nun gilt die Bewegungsgleichung

$$J\ddot{\phi} = M\omega \quad (13)$$

und außerdem

$$R_y = R \sin \phi \quad (14)$$

mit ϕ dem Winkel zwischen der Position des Schwerpunktes und der y -Achse, so dass die Bewegungsgleichung schließlich zu

$$J\ddot{\phi} = -MgR \sin \phi \quad (15)$$

wird. Im Fall des mathematischen Pendels war

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi \quad (16)$$

so dass es eine einfache Korrespondenz gibt: Physikalisches Pendel:

$l \rightarrow \frac{J}{MR}$. Hierin ist zu beachten, dass J das Trägheitsmoment um die festen Drehachse ist, die i. a. nicht durch den Schwerpunkt geht.

Für ein Punktteilchen ist $R = l$, $M = m$, $J = ml^2$ und man bekommt das alte Ergebnis

$$\frac{J}{MR} = \frac{ml^2}{ml} = l \quad (17)$$

zurück, wie es sein muss.

5 Der Satz von Steiner

Es bleibt die Frage, ob die Trägheitsmomente für jede Drehachse neu berechnet werden müssen, oder ob ein Zusammenhang besteht. Diesen gibt es tatsächlich.

Man betrachte zwei Drehachse, o. B. d. A. in z -Richtung gewählt, mit Abstand S Zur Berechnung der Trägheitsmomente brauchen wir die senkrechten Abstände der Massenpunkte von der Achse; die Koordinaten werden für Achse 1 x, y und für Achse 2 x', y' genannt. Dann ist für Achse 2:

$$\mathcal{J}' = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \quad (18)$$

und für Achse 1:

$$\mathcal{J} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (19)$$

Wenn wir die relative Verschiebung der beiden Achsen gegeneinander mit S_x und S_y bezeichnen ($S_x^2 + S_y^2 = S^2$), so wird Achse 1:

$$\mathcal{J}' = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = \sum_i m_i ((x_i - S_x)^2 + (y_i - S_y)^2) \quad (20)$$

und mit Ausmultiplizieren

$$\mathcal{J}' = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum_i m_i (S_x^2 + S_y^2) - 2 \sum_i m_i (x_i S_x + y_i S_y) = \mathcal{J} + MS^2 \quad (21)$$

falls Achse 1 durch den Schwerpunkt läuft, da in diesem Fall

$$R_x = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = 0 \quad (22)$$

gelten muss. Damit ist der Satz von Steiner abgeleitet:

Wenn ein Körper um eine Achse rotiert, die nicht durch den Schwerpunkt geht, dann ist das Trägheitsmoment

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s + MS^2, \quad (23)$$

wobei \mathcal{J}_s das Trägheitsmoment um die dazu parallele Achse durch den Schwerpunkt und S der Abstand der Achsen ist.

6 Beispiel: Zylinder

Das Trägheitsmoment um die Symmetrieachse ist

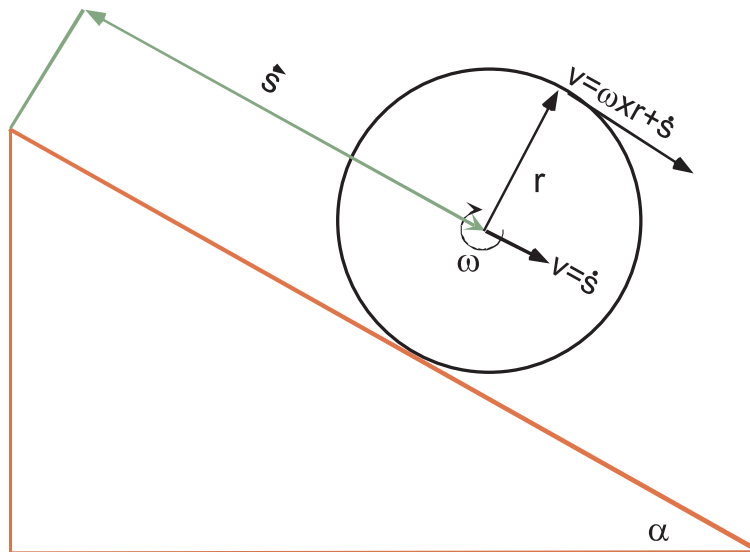
$$\mathcal{J}_s = \frac{1}{2}MR^2 \quad (24)$$

und damit wird das um eine Achse auf dem Zylindermantel, die parallel zur Symmetrieachse ist, zu

$$\mathcal{J}' = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \quad (25)$$

7 Rollende Bewegung

Ein interessantes Anwendungsbeispiel ist die Bewegung eines Zylinders, der ohne Schlupf eine schiefe Ebene hinunterrollt. Wenn man die Bewegung als Drehung um seine Zentralachse betrachtet, dann würde dabei der Schwerpunkt des Zylinders in Ruhe bleiben, so dass man noch eine zusätzliche Bewegung über den Vektor $\vec{s}(t)$ bekommt, der die Position des Zylinders inklusive ihrer Bewegungsrichtung beschreibt.



Ein Zylinder mit Radius R rollt eine schiefe Ebene hinunter. In dieser Darstellung wird die Bewegung als Rotation um seine Achse plus eine Translation mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{s}}$ dargestellt.

Die Geschwindigkeit eines Bestandteils m_i des Körpers ist

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i + \dot{\vec{s}}, \quad (26)$$

wobei die Ortsvektoren als Ursprung den Schwerpunkt haben sollen (durch den die Achse des Zylinders geht). Die kinetische Energie wird damit zu

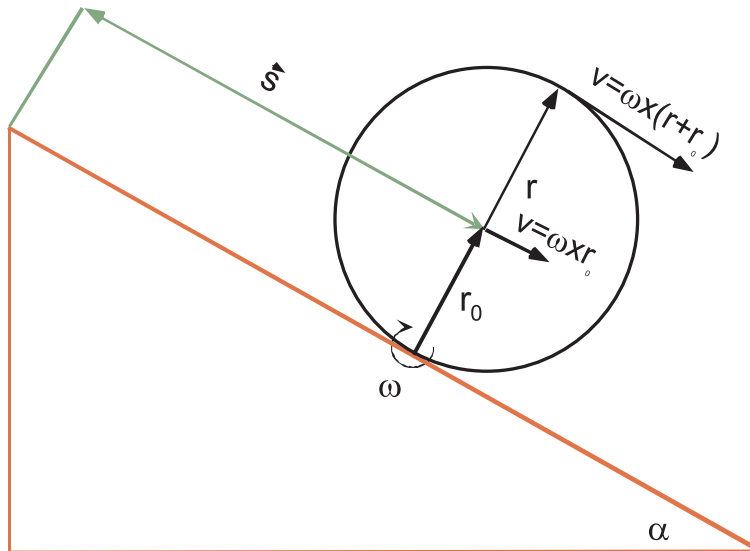
$$\begin{aligned}
 T &= \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i + \dot{\vec{s}})^2 \\
 &= \sum_i \frac{m_i}{2} [(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + 2\dot{\vec{s}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \dot{s}^2] \\
 &= \frac{1}{2} (\mathcal{J}\omega^2 + M\dot{s}^2).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Dabei verschwand der Mischterm, weil in einem Koordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt gilt $\sum_i m_i \vec{r}_i = M\vec{R} = 0$. Der erste Term dagegen ist genau die Rotationsenergie mit dem Trägheitsmoment berechnet um die Achse des Zylinders, welches früher schon als $\mathcal{J} = MR^2/2$ berechnet wurde.

Da der Zylinder ohne Schlupf rollen soll, muss $\dot{s} = R\omega$ sein, so dass man T durch die generalisierte Geschwindigkeit ausdrücken kann:

$$T = \frac{3}{4} M \dot{s}^2. \tag{28}$$

Dasselbe Ergebnis lässt sich auch einfacher erreichen, wenn man berücksichtigt, dass dieselbe Geschwindigkeitsverteilung auch bei Rotation um die Achse, auf der der Zylinder instantan rollt, erhalten wird.



Alternativ kann man die Kontaktachse mit der schiefen Ebene als Drehachse betrachten. In diesem Fall wird die Translation mit beschrieben.

Die lokale Geschwindigkeit im Zylinder ist, wenn wir den Ursprung der Koordinaten beibehalten, gegeben durch

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i + \vec{r}_0) \tag{29}$$

Der Ausdruck $\vec{\omega} \times \vec{r}_0$ hat aber die Richtung von $\dot{\vec{s}}$ und als Betrag $(\dot{s}/R)R$, ergibt also genau die Translationsbewegung. Die Geschwindigkeiten der Bestandteile des Zylinders sind also dieselben wie vorher.

Allerdings können wir in diesem Fall die kinetische Energie sofort hinschreiben: das Trägheitsmoment ist nach dem Satz von Steiner jetzt

$$\mathcal{J}' = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2 \tag{30}$$

und damit ist wie oben

$$T = \frac{3}{4}MR^2\omega^2 = \frac{3}{4}M\dot{s}^2. \quad (31)$$

Diese einfachere Ableitung beruht darauf, dass das *instantane* Geschwindigkeitsfeld in beiden Fällen identisch ist, und nur davon hängt die kinetische Energie ab. Die wirkliche Bewegung im zweiten Fall würde ja den Zylinder um die Kontaktachse in die schiefe Ebene hinein rotieren lassen. Man beachte das verschiedene Verhalten der Drehachsen: im ersten Fall bleibt sie die Symmetrieachse des Zylinders, bewegt sich aber mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{s}}$, während sie im zweiten Fall an derselben Stelle bleibt, aber sich auf der Oberfläche des Zylinders bewegt.

Die potentielle Energie ist (wenn man die x -Koordinate nach oben wählt

$$V = \sum_i m_i g x_i = MgR_x = Mg(l - s) \sin \alpha, \quad (32)$$

wobei l die Gesamtlänge der schiefen Ebene und R_x die x -Komponente des Schwerpunktes bezeichnet.

Damit haben wir die Lagrangefunktion

$$L = \frac{3}{4}M\dot{s}^2 - Mg(l - s) \sin \alpha \quad (33)$$

und damit die Bewegungsgleichung

$$\ddot{s} = \frac{2}{3}g \sin \alpha. \quad (34)$$

Im Vergleich: für ein Punktteilchen wäre die Rotationsenergie Null, also die kinetische Energie $T = M\dot{s}^2/2$ und die Bewegungsgleichung wird dann zu

$$\ddot{s} = g \sin \alpha. \quad (35)$$

Der Zylinder beschleunigt also um den Faktor $2/3$ langsamer, weil ein Teil der potentiellen Energie in die Rotationsenergie gesteckt wird.