19. Vorlesung Sommersemester

1 Allgemeine Bewegung des starren Körpers

Bisher wurde nur der Fall behandelt, dass die Drehachse festgehalten wird. Im allgemeinen Fall kommen als Probleme hinzu, dass

1. die Drehachse sich dauernd ändert,
2. damit auch das Trägheitsmoment sich verändert und
3. $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ nicht mehr die gleiche Richtung haben.

Es wird also eine algemeinere mathematische Behandlung gebraucht, die außerdem noch die Frage klärt, wie die Translation und Rotation sauber zu trennen sind.

Da in einem starren Körper die Abstände aller Punkte fest sind, gilt für jedes Punktteilchenpaar (i, j)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0. \tag{1}$$

Erinnern wir uns an die Zwangsbedingung für die Hantel aus zwei Punktteilchen. Mit den Zwangsbedingungen verträglich ist eine Kombination aus gemeinsamer Verschiebung und eine gemeinsame Rotation,

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i. \tag{2}$$

Da *alle* Paare sich wie Hanteln verhalten, ist dies nur möglich, wenn jeder Massenpunkt eine Bewegung gemäß dieser Formel mit demselben $\vec{v}_0$ und $\vec{\omega}$ vollführt.

2 Körperfestes und raumfestes System

Die Translation zu beschreiben erfordert, einen Punkt S des starren Körpers zu betrachten, dessen Lage im Raum anzugeben ist. Dieser Punkt kann, muss aber nicht, der Schwerpunkt sein. Das Beispiel des rollenden Zylinders hat ja gezeigt, dass die Drehbewegung auf verschiedene Punkte bezogen werden kann (in dem Fall den Mittelpunkt bzw. den Kontaktpunkt des Zylinders mit der schiefen Ebene.

Die instantane Rotation des starren Körpers muss dann um eine Achse durch diesen Punkt erfolgen (sonst würde dieser Punkt ja mitrotieren, also selbst eine Kombination von Translation und Rotation ausführen).

Man führt nun zwei Koordinatensysteme ein:

1. Das *raumfeste* System $\hat{\Sigma}$, ein Inertialsystem, das zeitlich konstante Einheitsvektoren $\hat{\vec{e}}_i$, $i = 1, 2, 3$ besitzt. Vektoren in Bezug auf dieses System werden mit $\hat{\vec{r}}$ bezeichnet.
2. Das *körperfeste* System Σ hat den Punkt S als Ursprung; seine Einheitsvektoren $\vec{e}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ sind zeitabhängig und fest am starren Körper angebracht. **Entscheidend ist, dass alle Punkte des starren Körpers in Σ ruhen**, d. h. die Ortsvektoren der Massenpunkte m_i, die $\vec{r}_i$ sind konstant.

Der Punkt S habe in $\hat{\Sigma}$ die Koordinaten $\vec{r}_0$.

Die instantane Geschwindigkeit eines Massenpunktes im System $\hat{\Sigma}$ besteht nun aus der momentanen Drehung, die durch die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ angegeben wird, und aus der gemeinsamen Translationsbewegung des Körpers:

$$\dot{\hat{\vec{r}}}_i = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \tag{3}$$

Die kinetische Energie wird nun zu

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\hat{\vec{r}}}_i^{\,2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_0^{\,2} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2 + \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) \cdot \dot{\vec{r}}_0 . \end{aligned} \tag{4}$$

Es gibt also zunächst einen Kopplungsterm, der sich aber als Spatprodukt umformen lässt zu

$$\sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) \cdot \dot{\vec{r}}_0 = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \cdot \left(\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{\omega}\right) = M\vec{R} \cdot \left(\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{\omega}\right). \tag{5}$$

Darin ist $\vec{R}$ der Schwerpunkt im System Σ.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, den Kopplungsterm zum Verschwinden zu bringen, die auf einer speziellen Wahl von S beruhen:

1. Der Punkt S wird festgehalten (der Fall des *Kreisels*). Dann ist $\vec{r}_0$ zeitunabhängig und man kann o. B. d. A. diesen Punkt als Ursprung wählen: $\vec{r}_0 = 0$ und $\dot{\vec{r}}_0 = 0$. In diesem Fall bleibt nur noch der Rotationsanteil der kinetischen Energie übrig:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2 . \tag{6}$$

2. Man wählt für S den Schwerpunkt. Dann wird $\vec{R} = 0$ und man erhält

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^{\,2} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2 . \tag{7}$$

   Die kinetische Energie zerfällt also in diesem Fall auch in eine Translationsanteil (der meist von geringem Interesse ist) und einen Rotationsanteil T_R, der uns beschäftigen wird.

In beiden Fällen ist die Form der Rotationsenergie dieselbe, Unterschiede können nur dadurch hereinkommen, welchen Punkt man als Ursprung nimmt.

3 Form der Rotationsenergie

Die Rotationsenergie muss jetzt selbst aufgespalten werden in einen Anteil, der den Körper beschreibt und die Abhängigkeit von $\vec{\omega}$, also entsprechen $T = \mathcal{J}\omega^2/2$ bei fester Achse. Dieser Ausdruck ist jetzt nicht sinnvoll, weil die Richtung von ω darin verlorengegangen ist. Stattdessen bemerken wir, dass T_R die Koordinaten und die Komponenten von $\vec{\omega}$ beide quadratisch enthält, es muss sich also auf eine quadratische Form der Art

$$T_R = \frac{1}{2} \left(\mathcal{J}_{xx}\omega_x^2 + \mathcal{J}_{yy}\omega_y^2 + \mathcal{J}_{zz}\omega_z^2 + 2\mathcal{J}_{xy}\omega_x\omega_y + 2\mathcal{J}_{xz}\omega_x\omega_z + 2\mathcal{J}_{yz}\omega_y\omega_z\right) \tag{8}$$

umschreiben lassen, wobei die Koeffizienten Summen über die Massen mal Quadrate der Koordinaten der Massenpunkte sein müssen. Der Faktor zwei wurde eingefügt, weil man dann auch die Summenschreibweise benutzen kann

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{kl} \mathcal{J}_{kl} \omega_k \omega_l. \tag{9}$$

Da das Produkt $\omega_x \omega_y$ als $\omega_y \omega_x$ noch einmal vorkommt ist nur die Summe $\mathcal{J}_{xy} + \mathcal{J}_{yx}$ festgelegt; es ist dann sinnvoll, die symmetrische Aufteilung

$$\mathcal{J}_{xy} = \mathcal{J}_{yx}, \quad \mathcal{J}_{xz} = \mathcal{J}_{zx}, \quad \mathcal{J}_{yz} = \mathcal{J}_{zy} \tag{10}$$

zu wählen.

Um nun T_R als quadratische Form zu schreiben, wendet man die Beziehung

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \tag{11}$$

an. Das führt auf

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \omega^2 (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)^2. \tag{12}$$

Ausmultiplizieren und Sortieren der Terme in den ω-Komponenten führt zu den Komponenten des *Trägheitstensors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{xx} &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad & \mathcal{J}_{xy} = \mathcal{J}_{yx} &= -\sum_i m_i x_i y_i, \\
\mathcal{J}_{yy} &= \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad & \mathcal{J}_{xz} = \mathcal{J}_{zx} &= -\sum_i m_i x_i z_i, \\
\mathcal{J}_{zz} &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad & \mathcal{J}_{yz} = \mathcal{J}_{zy} &= -\sum_i m_i y_i z_i.
\end{aligned} \tag{13}$$

Man erkennt die Struktur: die Komponenten mit zwei gleichen Indizes entsprechen einfach dem Trägheitsmoment um die entsprechende Koordinatenachse, da z. B. $y^2 + z^2$ der quadratische Abstand von der x-Achse ist. Die anderen Komponenten summieren jeweils das Produkt der zugehörigen Koordinaten, gewichtet mit den Massen.

4 Der Trägheitstensor

Den am Ende der letzen Vorlesung abgeleitete Trägheitstensor kann man in Matrixform schreiben:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Wenn man die Indizes numeriert und wie früher $x_i = x_{i,1}$, $y_i = x_{i,2}$ und $z_i = x_{i,3}$ verwendet, lässt sich die Definition auch zusammenfassen zu

$$\mathcal{J}_{kl} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(r_i^2 \delta_{kl} - x_{i,k} x_{i,l} \right), \quad j, k \in \{1, 2, 3\}. \tag{15}$$

Im Kontinuumsfall ist wieder einfach die Summe über die Punktteilchen mit ihren Massem durch ein Integral über die Dichte zu ersetzen:

$$\mathcal{J}_{kl} = \int d^3 r \, \rho(\vec{r}) \left(r^2 \delta_{kl} - x_k x_l \right), \tag{16}$$

wobei x_k, $k \in \{1, 2, 3\}$ für die Komponenten von $\vec{r}$ steht.

5 Der Drehimpuls

Bevor wir die Eigenschaften von Tensoren diskutieren, zunächst noch die Ableitung des Drehimpulses. Lässt er sich ebenfalls in Translations- und Rotationsanteil aufspalten? Kann man ihn ebenfalls durch den Trägheitstensor ausdrücken, oder ist wieder eine neue Definition nötig?

Der Drehimpuls des starren Körpers im raumfesten System ist

$$\hat{\vec{L}} = \sum_i m_i \hat{\vec{r}}_i \times \hat{\vec{v}}_i. \tag{17}$$

Hierin können wir aus der letzten Vorlesung einsetzen

$$\hat{\vec{r}}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i, \qquad \hat{\vec{v}}_i = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i. \tag{18}$$

Wenn wir das in (17) einsetzen und ausmultiplizieren. wird daraus

$$\begin{aligned} \hat{\vec{L}} \quad &= \quad \sum_i m_i \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ & \quad + \sum_i m_i \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_0. \end{aligned} \tag{19}$$

In der ersten Zeile stehen sichtlich der Drehimpuls der Translationsbewegung, die durch $\vec{r}_0(t)$ beschrieben wird, und der der inneren Rotation. Die zweite Zeile enthält zwei Kopplungsterme, die hoffentlich in unseren Spezialfällen ebenso wie bei der kinetischen Energie verschwinden werden.

Das ist auch tatsächlich der Fall, denn:

- für den Fall des Kreisels ist $\vec{r}_0 = 0$, $\dot{\vec{r}}_0 = 0$, so dass beide trivial verschwinden. In diesem Fall ist der Drehimpuls der Translation ebenfalls Null, aber das ist nicht so wichtig,
- für den Fall, dass der Schwerpunkt festgehalten wird, ist $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$ und diese Summe lässt sich in beiden Kopplungstermen ausklammern.

In beiden Fällen gilt also die Zerlegung des Drehimpulses

$$\hat{\vec{L}} = \vec{L}_T + \vec{L}_R \tag{20}$$

mit

$$\vec{L}_T = M \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0, \qquad \vec{L}_R = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i). \tag{21}$$

Es bleibt die Aufgabe der Zerlegung des Rotationsanteils. Es liegt nahe, das doppelte Vektorprodukt zu benutzen:

$$\vec{L}_R = \sum_i m_i \left(r_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \right). \tag{22}$$

Um hierin wieder den Trägheitstensor einzubringen, schreiben wir es zunächst in Komponenten:

$$\vec{L}_{R,k} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega_k - \sum_l \left(\sum_i m_i x_{i,k} x_{i,l} \right) \omega_l. \tag{23}$$

Man beachte, dass k und l von 1 bis 3 laufen, während i die Punktteilchen von 1 bis n abzählt. Dabei wurde schon so ausgeklammert, dass im zweiten Teil ein Bestandteil des

Trägheitstensors sichtbar ist. Im ersten stört noch der fehlende zusätzliche Index l, den man aber leicht über ein Kroneckersymbol hineinbringen kann: $\omega_k = \sum_l \delta_{kl}\omega_l$. Damit ist jetzt der Trägheitstensor ersichtlich:

$$\vec{L}_{R,k} = \sum_l \left[\sum_i m_i \left(r_i^2 \delta_{kl} - x_{i,k} x_{i,l} \right) \right] \omega_l = \sum_l \mathcal{J}_{kl} \omega_l. \tag{24}$$

Diese Beziehung schreibt man meist als Skalarprodukt (eigentlich ist es ein Produkt einer 3×3-Matrix mit einem Vektor:

$$\vec{L}_R = \mathcal{J} \cdot \vec{\omega}. \tag{25}$$

Ebenso kann man die kinetische Energie als Skalarprodukt des Trägheitstensors von beiden Seiten schreiben:

$$T_R = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{kl} \mathcal{J}_{kl} \omega_k \omega_l = \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathcal{J} \cdot \vec{\omega}. \tag{26}$$

Es ist aber klar, dass die Vektorschreibweise hier an ihre Grenzen stößt. Wenn man alternativ die Vektoren als Spaltenvektoren auffasst (und ohne Vektorpfeil schreibt) und die Matrixmultiplikation benutzt, kann man

$$L = \mathcal{J}\omega \quad \text{und} \quad T_R = \tfrac{1}{2} \omega^T \mathcal{J} \omega \tag{27}$$

schreiben, wobei ω^T der zu ω transponierte Zeilenvektor ist; ohne Transposition ist die Multiplikation nicht möglich.

6 Analogien zu Punktteilchen

Zum leichteren Einprägen der Formeln für den starren Körper können die Beziehungen mit denen für Punktteilchen verglichen werden:

Punktteilchen	Starrer Körper $\vec{\omega}$ fest	Starrer Körper allgemein
$\vec{v}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\omega}$
m	$\mathcal{J}$	$\mathcal{J}$ (Tensor)
$T = \frac{m}{2} v^2$	$T = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$	$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathcal{J} \cdot \vec{\omega}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L}_\omega = \mathcal{J}\vec{\omega}$	$\vec{L} = \mathcal{J} \cdot \vec{\omega}$

7 Matrizen und Tensoren

Es sei noch kurz erwähnt, was einen Tensor von einer Matrix unterscheidet: eine Matrix ist nur ein rechtwinkliges Schema aus Zahlen, das Multiplikations- und Additionsregeln erfüllt. Ein Tensor muss zusätzlich noch Transformationseigenschaften erfüllen: z. B. wird bei einer Drehung $\mathcal{J}$ über jeden seiner Indizes mit einer Drehmatrix multipliziert.

Es gibt noch andere Arten von Tensoren, wie z. B. *sphärische Tensoren* und *Tensoren höherer Stufe* (d. h. mit mehr als zwei Indizes).