20. und 21. Vorlesung Sommersemester

1 Der Spezialfall fester Drehachse

Aus dem Trägheitstensor sollte der früher behandelte Spezialfall fester Drehachse wieder hervorgehen. Wenn man $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$ mit einem Einheitsvektor $\vec{n}$ setzt, der die Richtung der Drehachse angibt (sie muss natürlich durch den Ursprung des Koordinatensystems gehen, in dem $\mathcal{J}$ berechnet wurde), so ist

$$T = \frac{1}{2} \left(\vec{n} \cdot \mathcal{J} \cdot \vec{n} \right) \omega^2, \tag{1}$$

und somit das Trägheitsmoment für diese Achse durch eine zweifache Projektion des Tensors (in seinen beiden Indizes) gegeben:

$$\mathcal{J}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \mathcal{J} \cdot \vec{n} = \sum_{k,l=1}^{3} \mathcal{J}_{kl} n_k n_l. \tag{2}$$

Für den Drehimpuls erhält man

$$\vec{L} = \left(\mathcal{J} \cdot \vec{n} \right) \omega, \tag{3}$$

was offensichtlich nicht die gleiche Richtung wie $\vec{\omega}$ haben muss, aber für die Komponente in diese Richtung erhalten wir wieder die einfachere Beziehung

$$L_\omega = \vec{n} \cdot \vec{L} = \left(\vec{n} \cdot \mathcal{J} \cdot \vec{n} \right) \omega = \mathcal{J}_{\vec{n}} \omega. \tag{4}$$

2 Das Trägheitsellipsoid

Die dreidimensionale Verallgemeinerung einer Ellipse ist ein Ellipsoid mit der neheliegenden Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{5}$$

In diesem Fall ist der Schnitt dieser Fläche mit jeder der drei Koordinatenebenen eine Ellipse, z. B. mit der $y = 0$-Ebene eine Ellipse mit den Halbachsen a in x-Richtung und c in z-Richtung.

Dieses Ellipsoid wird so in seinem *Hauptachsensystem* beschrieben, d. h. die Halbachsen liegen in Richtung der Koordinatenachsen. Dementsprechend braucht diese beschreibung nur die drei Achsenlängen a, b und c.

Was passiert nun, wenn man dieses Ellipsoid wie einen starren Körper im Raum dreht, was durch drei Drehwinkel beschrieben wird? Die Koordinaten werden durch eine Dehmatrix transformiert,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{xx} & \mathcal{R}_{xy} & \mathcal{R}_{xz} \\ \mathcal{R}_{yx} & \mathcal{R}_{yy} & \mathcal{R}_{yz} \\ \mathcal{R}_{zx} & \mathcal{R}_{zy} & \mathcal{R}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \tag{6}$$

und die Gleichung des Ellipsoids in den gestrichenen Koordinaten wird zu

$$\begin{aligned}\frac{\left(\mathcal{R}_{xx}x' + \mathcal{R}_{xy}y' + \mathcal{R}_{xz}z'\right)^2}{a^2} &+ \frac{\left(\mathcal{R}_{yx}x' + \mathcal{R}_{yy}y' + \mathcal{R}_{yz}z'\right)^2}{b^2} \\ &+ \frac{\left(\mathcal{R}_{zx}x' + \mathcal{R}_{zy}y' + \mathcal{R}_{zz}z'\right)^2}{c^2} = 1.\end{aligned} \tag{7}$$

Diese längliche Schreibung dient nur zu einem Zweck: man erkennt, dass beim Ausmultiplizieren der linken Seite daraus eine homogene Funktion vom Rang 2 in den gestrichenen Koordinaten wird, die man umschreiben kann als

$$A_{xx}x'^2 + A_{yy}y'^2 + A_{zz}z'^2 + 2A_{xy}x'y' + 2A_{xz}x'z' + 2A_{yz}y'z' = 1. \tag{8}$$

Die Koeffizienten A_{kl} sind dabei auf irgendeine, uns nicht weiter interessierende Weise, durch die Halbachsen und die Matrixelemente der Drehung gegeben. Die Faktoren 2 entstehen dadurch, dass man die Produkte $x'y'$ und $y'x'$ zusammenfasst. Das Ellipsoid wird also durch einen symmetrischen Tensor beschrieben:

$$\vec{r}' \cdot \mathcal{A} \cdot \vec{r}' = 1. \tag{9}$$

Diese Analogie erlaubt es, nun *jedem* symmetrischen Tensor vom Rang zwei ein Ellipsoid zuzuordnen, insbesondere unserem Trägheitstensor wird das *Trägheitsellipsoid* zugeordnet, das durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 &= \mathcal{J}_{xx}x^2 + \mathcal{J}_{yy}y^2 + \mathcal{J}_{zz}z^2 + 2\mathcal{J}_{xy}xy + 2\mathcal{J}_{xz}xz + 2\mathcal{J}_{yz}yz \\ &= \vec{r} \cdot \mathcal{J} \cdot \vec{r} \end{aligned} \tag{10}$$

gegeben ist.

Eine "anschauliche" Bedeutung des Trägheitsellipsoids erhält man, wenn man ausrechnet, welchen Abstand seine Oberfläche vom Ursprung in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{n}$ hat. Setzt man in (10) $\vec{r} = q\vec{n}$ ein, wobei q gerade diesen Abstand bedeutet, so wird

$$1 = q^2 \vec{n} \cdot \mathcal{J} \cdot \vec{n} = q^2 \mathcal{J}_{\vec{n}}, \tag{11}$$

der gesuchte Abstand hängt also über

$$q = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_{\vec{n}}}} \tag{12}$$

mit dem Trägheitsmoment um eine Achse in diese Richtung zusammen.

3 Das Hauptachsensystem

Wie wir oben gesehen haben, beschreiben die sechs unabhängigen Elemente eines symmetrischen Tensors sowohl die Länge der drei Halbachsen wie auch die Orientierung des Ellipsoids im Raum. Wenn die Halbachsen in Richtung der Koordinatenachsen ausgerichtet sind, reduziert sich der Tensor gemäß (5) auf die Diagonalelemente, die sog. *Hauptträgheitsmomente*. Der Trägheitstensor hat in diesem Koordinatensystem dann die Form

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_{zz} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Damit müssen die nichtdiagonalen Elemente, die sog. *Deviationselemente* bei dieser Wahl der Koordinatenachsen verschwinden. Das ist z. B. der Fall wenn der Körper spiegelsymmetrisch bei Umkehr einer Achse ist: wenn z. B. die Dichte die Invarianz $\rho(x,y,z) = \rho(-x,y,z)$ besitzt, wird

$$\mathcal{J}_{xy} = \int d^3r\, xy\rho(x,y,z) = 0, \tag{14}$$

weil über eine in x ungerade Funktion integriert wird. Ebenso verschwindet dann $\mathcal{J}_{xz}$.

Beim Ellipsoid im Hauptachsensystem sieht man sofort, dass es diese Spiegelsymmetrie in Bezug auf alle drei Koordinaten besitzt.

4 Das Eigenwertproblem

Wenn der Tensor im Hauptachsensystem gegeben ist, also Diagonalform hat, hat er die besondere Eigenschaft, dass er Vektoren in Richtung der drei Achsen nicht in der Richtung ändert, sondern nur mit einer Zahl multipliziert:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{xx}a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{xx} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

und analog für die y- und z-Richtungen. Dagegen wird ein Vektor in einer anderen Richtung i. a. seine Richtung ändern:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{xx}a \\ \mathcal{J}_{yy}b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Das ist zum ursprünglichen Vektor nur dann parallel, wenn $\mathcal{J}_{xx} = \mathcal{J}_{yy}$ ist.

5 Typen von Trägheitstensoren

Wir sehen also, dass es eine Rolle spielt, wieviel der Hauptträgheitsmomente gleich sind. Zuvor gehen wir jedoch auf die traditionelle Abkürzung ein: man bezeichnet zur Vereinfachung $\mathcal{J}_{xx} = A$, $\mathcal{J}_{yy} = B$, $\mathcal{J}_{zz} = C$, so dass der Trägheitstensor die Form

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \tag{17}$$

erhält.

Man unterscheidet drei Fälle:

1. Der *Kugelkreisel*: alle drei sind gleich: $A = B = C$. Dann ist der Trägheitstensor ein Vielfaches der Einheitsmatrix und jeder beliebige Vektor behält unter seiner Wirkung die Richtung bei.

2. Der *symmetrische Kreisel*: zwei der Hauptträgheitsmomente sind gleich. Wenn z. B. $A = B$ ist, so wird jeder Vektor in der (x,y)-Ebene in der Richtung unverändert.

3. Der *asymmetrische Kreisel*: alle drei Hauptträgheitsmomente sind verschieden. In diesem Fall bleiben nur die Koordinatenrichtungen selbst unverändert.

6 Bestimmung des Hauptachsensystems

Um die Hauptachsen zu suchen, muss man also Vektoren $\vec{a}$ suchen, die die Gleichung

$$\mathcal{J} \cdot \vec{a} = \alpha \vec{a} \tag{18}$$

erfüllen, also *Eigenvektoren* von $\mathcal{J}$ zum *Eigenwert* α sind.

Mit Hilfe der Einheitsmatrix lässt sich (18) umformen zu

$$(\mathcal{J} - \alpha \mathcal{I}) \cdot \vec{a} = 0. \tag{19}$$

Das ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, das ausgeschrieben so aussieht:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_{xx} - \alpha & \mathcal{J}_{xy} & \mathcal{J}_{xz} \\ \mathcal{J}_{yx} & \mathcal{J}_{yy} - \alpha & \mathcal{J}_{yz} \\ \mathcal{J}_{zx} & \mathcal{J}_{zy} & \mathcal{J}_{zz} - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Ein solches System hat bekanntlich nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Diese Bedingung

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{xx} - \alpha & \mathcal{J}_{xy} & \mathcal{J}_{xz} \\ \mathcal{J}_{yx} & \mathcal{J}_{yy} - \alpha & \mathcal{J}_{yz} \\ \mathcal{J}_{zx} & \mathcal{J}_{zy} & \mathcal{J}_{zz} - \alpha \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

liefert ein Polynom dritten Grades in α, dessen Nullstellen die möglichen Eigenwerte sind.

Von den Nullstellen können alle drei verschieden sein (asymmetrischer Kreisel), dann sind die drei Eigenvektoren festgelegt; es können zwei gleich sein (symmetrischer Kreisel), dann ist ein Vektor eindeutig und die zwei anderen können beliebig linear kombiniert werden; oder alle drei sind gleich, dann ist jeder Vektor Eigenvektor (Kugelkreisel).

7 Beispiel 1: Würfel mit festem Schwerpunkt

Ein Würfel der Kantenlänge a drehe sich um seinen Schwerpunkt = Mittelpunkt. Wenn man dort den Ursprung wählt, erstreckt sich der Würfel in jeder Koordinate von $-a/2$ bis $+a/2$ und man berechnet für die Elemente des Trägheitstensors in der Diagonale (wegen der Symmetrie des Tensors müssen diese untereinander gleich sein, genauso wie die Deviationsmomente):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{xx} &= \int \mathrm{d}^3 r\, \rho(\vec{r})(y^2 + z^2) && (22) \\ &= \rho \left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \right) \times && (23) \\ & \quad \left[\left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z \right) \left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y\, y^2 \right) + \left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y \right) \left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z\, z^2 \right) \right] && (24) \\ &= \frac{\rho a^5}{6} && (25) \\ &= \frac{M a^2}{6} && (26) \end{aligned}$$

mit $M = \rho a^3$ der Masse des Würfels. Die Devaitionsmomente verschwinden aber alle, weil die Integrale über die erste Potenz der Koordinaten wegen der Symmetrie des Würfels Null ergeben:

$$\mathcal{J} = -\int \mathrm{d}^3 r\, \rho x y = -\rho \left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x\, x \right) \left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y\, y \right) \left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z \right) = 0. \tag{27}$$

Damit ist der Trägheitstensor

$$\mathcal{J} = \frac{Ma^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

der Würfel ist also ein Kugelkreises, für den jede beliebige Achse Hauptträgheitsachse ist und der sich bzgl. seiner Rotationseigenschaften nicht von einer Kugel unterscheidet.