22. Vorlesung Sommersemester

1 Beispiel 2: Würfel mit festgehaltener Ecke

In diesem Fall wählt man den Koordinatenursprung in der Ecke und der Würfel ist durch den Bereich $x = 0 \ldots a$, $y = 0 \ldots a$ und $z = 0 \ldots a$ bestimmt.

Die Integration ist genauso einfach wie oben und liefert den Trägheitstensor

$$\mathcal{J} = \frac{Ma^2}{12} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Man beachte, dass wieder die Diagonalelemente und Deviationsmomente untereinander gleich sind: von der Ecke aus gesehen sind die drei Koordinatenrichtungen äquivalent.

Für die Säkulargleichung ziehen wir den konstanten Faktor heraus und betrachten $\frac{12\mathcal{J}}{ma^2}$

$$\det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 8-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 8-\lambda \end{pmatrix} = 0 = f(\lambda). \tag{2}$$

Das führt auf

$$f(\lambda) = 242 - 165\lambda + 24\lambda^2 - \lambda^3. \tag{3}$$

Die Lösungen sind: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 11$, $\lambda_3 = 11$ mit Eigenvektoren $\vec{r}_1$ (Komponenten x_{1i}, $i \in \{1, 2, 3\}$) usw.

Die Eigenvektoren bestimmt man aus dem Eigenwertproblem durch Einsetzen jeweils eines der Eigenwerte, z. B.

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda_1 & -3 & -3 \\ -3 & 8-\lambda_1 & -3 \\ -3 & -3 & 8-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

Mit $\vec{r}_1$ ist auch jedes Vielfache $c\vec{r}_1$ Lösung: nur die Richtung ist bestimmt! Die Länge kann man frei wählen, meist wird $|\vec{r}_1| = 1$ verlangt. Mit $\lambda_1 = 2$ wird also

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Die erste Gleichung führt auf

$$6x_{11} - 3x_{12} - 3x_{13} = 0 \quad \longrightarrow \quad x_{11} = \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) \tag{6}$$

Subtrahieren der beiden anderen Gleichungen und Einsetzen dieses Ergebnisses ergibt

$$9x_{12} - 9x_{13} = 0 \qquad \Rightarrow \quad x_{12} = x_{13} \tag{7}$$

Da die Länge ja unbestimmt ist, kann man einfach eine der (nichtverschwindenden) Komponenten wählen, z. B. $x_{13} = 1$, woraus $x_{12} = 1,\ x_{11} = 1$ folgt. Damit hat man den Eigenvektor

$$\vec{r}_1 = C(1,1,1) \quad \text{normiert: } \vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1). \tag{8}$$

Für die beiden anderen Eigenwerte $\lambda_2 = 11,\ \lambda_3 = 11$ ist noch zu beachten, dass jede beliebige Linearkombination zweier Eigenvektoren zu diesem Eigenwert ebenfall ein Eigenvektor ist: aus

$$A\vec{r}_2 = 11 \cdot \vec{r}_2 \qquad A\vec{r}_3 = 11 \cdot \vec{r}_3 \tag{9}$$

folgt

$$A(c_2\vec{r}_2 + c_3\vec{r}_3) = 11 \cdot (c_2\vec{r}_2 + c_3\vec{r}_3) \tag{10}$$

Es wird also nur eine Ebene bestimmt. Entsprechend wird das Eigenwertproblem für diesen Eigenwert zu drei identischen Gleichungen

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = 0, \tag{11}$$

entspricht also einer einzigen Gleichung

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0. \tag{12}$$

Diese Gleichung besagt übrigens einfach, dass der Eigenvektor orthogonal zu $\vec{r}_1$ sein muss (wir werden sehen, dass dies für Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten bei einer reellen symmetrischen Matrix immer so ist):

$$\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot (x_{21}, x_{22}, x_{23}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_{21} + x_{22} + x_{23}) = 0 \tag{13}$$

Man kann nur den Vektor $\vec{r}_2$ unter dieser Bedingung frei wählen, z.B. $\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$. Der noch fehlende Eigenvektor $\vec{r}_3$ muss dann ebenfalls zu $\vec{r}_1$ orthogonal sein, sollte aber vernünftigerweise auch zu $\vec{r}_2$ orthogonal gewählt werden. Das kann man über das Vektorprodukt erreichen oder einfach durch Erraten. Eine Wahl ist $\vec{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

2 Das Eigenwertproblem

Zunächst aber noch einige allgemeine Ausführungen zum Eigenwertproblem. In allgemeiner Form hat das Eigenwertproblem die Form

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}, \tag{14}$$

wobei A eine $n \times n$-Matrix, $\vec{x}$ ein n-dimensionaler Vektor und λ der Eigenwert ist (in Englisch: *eigenvector, eigenvalue*). In Komponentenschreibweise ist das

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = \lambda x_i, \quad i = 1...n. \tag{15}$$

Indem man die rechte Seite mittels der Einheitsmatrix $\mathcal{I}$ ebenfalls als Matrixmultiplikation schreibt, erhält man

$$(A - \lambda \mathcal{I}) \cdot \vec{x} = 0 \tag{16}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\sum_j (A_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0. \tag{17}$$

Als Matrixgleichung ausgeschrieben sieht das so aus:

$$\begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & \dots & A_{n,n-1} & A_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0. \tag{18}$$

Das ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, bekanntlich ist die Bedingung für eine nichttriviale Lösung die *Säkulargleichung*:

$$\det(A - \lambda 1) = 0. \tag{19}$$

Sie bestimmt die möglichen Werte von λ. Da $\det(A - \lambda 1)$ ein Polynom n-ten Grades in λ ist,

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda 1) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{20}$$

gilt für die Lösungen der *Hauptsatz der Algebra*: Es gibt genau n Lösungen, die i. a. komplex sein können und nicht alle verschieden müssen.

Was bedeutet es, wenn eine Lösung mehrmals vorkommt? Seien die Lösungen λ_1,$\lambda_2 \dots \lambda_n$, Dann kann man schreiben

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j\lambda^j = C \cdot (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \tag{21}$$

und wenn eine Lösung mehrfach vorkommt, z. B. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, dann wird

$$f(\lambda) = C \cdot (\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_4) \dots (\lambda - \lambda_n) \tag{22}$$

Man kann Mehrfachnullstellen auf 2 Arten feststellen, indem man entweder

- das Polynom dividiert: bilde $\frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}$ hat dann immer noch λ_1 als Nullstelle; man muss dreimal dicvidieren, bis das nicht mehr der Fall ist,
- oder man bildet die Ableitung an der Nullstelle: bei $\lambda \approx \lambda_1$ verhält sich $f(\lambda)$ wie $(\lambda - \lambda_1)^3$, es verschwinden also die erste und zweite Ableitung an der Stelle λ_1. Allgemein hat man also eine k-fache Nullstelle, wenn die Ableitungen bis zur $k - 1$-fachen verschwinden.

3 Relle symmetrische Matrizen

Die zu einer Matrix A an der Diagonale gespiegelte Matrix nennt man die *transponierte Matrix* $B = A^T$, wobei für die Komponenten gilt $B_{ij} = A_{ji}$. Eine *Für relle symmetrische Matrix* ist nun durch

$$A = A^T = A^* \qquad \text{oder} \qquad A_{ij} = A_{ji} = A^*_{ij}, \quad i, j = 1 \dots n \tag{23}$$

gekennzeichnet. Für solche Matrizen gibt es zwei sehr wichtige Theoreme, deren Beweise so einfach sind, dass sie hier gegeben werden können.

1. **alle Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind reell**. Sei λ ein u. U. komplexer Eigenwert mit Eigenvektor $\vec{x}$. Dann bildet man das Skalarprodukt mit $\vec{x}^*$:

$$\sum_j A_{ij}x_j = \lambda x_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_i x_i^* A_{ij} x_j = \lambda \sum_i x_i^* x_i. \tag{24}$$

   Andereseits kann man dasselbe mit der komplex konjugierten Gleichung machen, wobei jetzt mit x das Skalarprodukt gebildet wird::

$$\sum_j A_{ij}^* x_j^* = \lambda^* x_i^* \quad \Longrightarrow \quad \sum_{ij} x_i A_{ij}^* x_j^* = \lambda^* \sum_i x_i x_i^* \tag{25}$$

   Nun ist aber

$$\sum_{ij} x_i A_{ij}^* x_j^* = \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j^* = \sum_{ij} x_i A_{ji} x_j^* = \sum_i x_i^* A_{ij} x_j, \tag{26}$$

   wobei die Symmetrien der Matrix benutzt und die Indizes in der Summe umbenannt wurden. Ein Vergleich der Ergebnisse zeigt, dass $\lambda = \lambda^*$, also λ reell sein muss.

   Nebenbemerkung: der Beweis zeigt, dass auch eine komplexe Matrix, die die Bedingung $A_{ij} = A_{ji}^*$ oder $A^* = A^T$ erfüllt, eine *hermitesche Matrix* dieselbe Eigenschaft hat.

   Da die Eigenwertgleichung nunmehr vollständig relle Koeffizienten hat — die Matrix und der Eigenwert sind rell — kann man auch o. B. d. A. relle Eigenvektoren annehmen.

2. **Für reelle symmetrische Matrizen sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.** Es sei

$$\sum_j A_{ij}x_j = \lambda_1 x_i, \quad \sum_j A_{ij} y_j = \lambda_2 y_j \tag{27}$$

   Dann kan man wieder die Skalarprodukte bilden

$$\sum_{ij,} y_j A_{ij} x_j = \lambda_1 \sum_i x_i y_i, \quad \sum_{ij} x_i A_{ij} y_j = \lambda_2 \sum_i x_i y_i \tag{28}$$

   und bekommt durch Ausnutzen der Symmetrie:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \sum_i x_i y_i = 0 \;\Rightarrow\; \sum_i x_i y_i = \vec{x} \cdot \vec{y} = 0. \tag{29}$$

4 Die Bewegungsgleichung für den starren Körper

Im raumfesten System ist

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\vec{L}}}{\mathrm{d}t} = \hat{\vec{M}}. \tag{30}$$

Um eine Gleichung für $\omega(t)$ zu bekommen, müsste man

$$\hat{\vec{L}} = \mathcal{J} \cdot \vec{\omega} \tag{31}$$

verwenden, das ist aber im raumfesten System $\hat{\Sigma}$ ungünstig, weil der Trägheitstensor sich ebenfalls dauernd ändert. Man bezieht also besser die Vektoren auf das körperfeste System Σ, und *speziell auf das Hauptachsensystem*, in dem ja der Trägheitstensor eine besonders einfache Form hat.

Beachte: wenn $\hat{\vec{M}} = 0$, dann sind die Komponenten von $\hat{\vec{L}}$ im $\hat{\Sigma}$ konstant, i. a. aber nicht in Σ, da ja dieser Vektor von einem rotierenden System aus gesehen wird. Es gibt also die beiden Zerlegungen

$$\hat{\vec{L}} = \hat{L}_x \vec{e}_{\hat{x}} + \hat{L}_y \vec{e}_{\hat{y}} + \hat{L}_z \vec{e}_{\hat{z}} \tag{32}$$

und

$$= L_\xi \vec{e}_\xi + L_\eta \vec{e}_\eta + L_\zeta \vec{e}_\zeta \tag{33}$$

und wir werden zur Ableitung der Bewegungsgleichung wieder die Beziehung für Ableitungen im rotierenden System verwenden:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\vec{L}}\right)_{\hat{\Sigma}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\vec{L}}\right)_{\Sigma} + \vec{\omega} \times \hat{\vec{L}} \tag{34}$$

5 Die Eulerschen Gleichungen

Im raumfesten System $\hat{\Sigma}$, das ja ein Inertialsystem ist, war die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\hat{\vec{L}}}{\mathrm{d}t} = \hat{\vec{M}} \tag{35}$$

Im körperfesten Hauptachsensystem Σ mit den koordinaten ξ, η, ζ ist die Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (p, q, r)$ und dem Drehimpuls $\vec{L} = (Ap, Bq, Cr)$, da ja der Trägheitstensor die Diagonalform

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{36}$$

hat. Man beachte im folgenden, dass der Körper sich in Σ nicht bewegt, dass also A, B und C in diesem System konstant sind.

Die Bewegungsgleichung basiert nun auf der vertrauten Beziehung zwischen der Ableitung im raumfesten und einem rotierenden System:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\hat{\Sigma}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} + \vec{\omega}\times, \tag{37}$$

was für den Drehimpuls bedeutet

$$\hat{\vec{M}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\vec{L}}\right|_{\hat{\Sigma}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}\right|_{\Sigma} + \vec{\omega} \times \hat{\vec{L}} \tag{38}$$

Hierin ist nun

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\vec{L}}\right|_{\Sigma} = (A\dot{p}, B\dot{q}, C\dot{r}), \tag{39}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{L} &= (p, q, r) \times (Ap, Bq, Cr) \\ &= (Cqr - Bqr, Apr - Cpr, Bqp - Apq), \end{aligned} \tag{40}$$

so dass man direkt die drei *Eulerschen Gleichungen* erhält:

$$\begin{aligned} M_\xi &= A\dot{p} + (C - B)qr \\ M_\eta &= B\dot{q} + (A - C)pr \\ M_\zeta &= C\dot{r} + (B - A)pq. \end{aligned} \tag{41}$$

Es handelt sich um nichtlineare gekoppelte Differentialgleichungen, und es ist noch zu beachten, dass man die Komponenten von $\vec{M}$ in Σ braucht. Ein Problem wird überhaupt sein, die Bewegung im Hauptachsensystem mit der im raumfesten in Beziehung zu setzen.