23. und 24. Vorlesung Sommersemester

1 Kräftefreier Kreisel

Wenn das äußere Drehmoment verschwindet, so reduzieren sich die Gleichungen auf

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= 0 \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= 0 \\ C\dot{r} + (B-A)pq &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Symmetrie dieser Gleichungen macht es möglich, leicht Erhaltungssätze abzuleiten. Wenn man die erste Gleichung mit p, die zweite mit q und die dritte mit r multipliziert und dann aufsummiert, so heben sich die hinteren Terme weg:

$$Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = -(C-B)pqr - (A-C)pqr - (B-A)pqr = 0 \tag{2}$$

und es folgt die Erhaltung der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Ap^2 + \frac{1}{2}Bq^2 + \frac{1}{2}Cr^2\right) = 0 \qquad \text{wegen} \\ T &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathcal{J}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \end{aligned} \tag{3}$$

Die kinetische Energie ist also im kräftefreien Fall erhalten. Das ist nicht überraschend, denn in (3) ist sie zwar über ihre Komponenten im körperfesten System angegeben, als Skalar sollte das aber denselben Wert geben wie den trivial erhaltenen in $\hat{\Sigma}$.

Für den Drehimpuls ist es etwas komplizierter. Wenn man die erste Gleichung jetzt mit Ap, die zweite mit Bq und die dritte mit Cr multipliziert und wieder aufsummiert, erhält man

$$\begin{aligned} A^2p\dot{p} \quad + \quad & A(C-B)pqr + B^2q\dot{q} + B(A-C)pqr + C^2r\dot{r} + C(B-A)pqr \\ & = A^2p\dot{p} + B^2q\dot{q} + C^2r\dot{r} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

was auf die Erhaltung des *Betrages* des Drehimpulses führt:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((Ap, Bq, Cr)^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\hat{\vec{L}}|^2\Big|_{\Sigma} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2\right) = 0 \tag{5}$$

In $\hat{\Sigma}$ ist $\hat{\vec{L}} =$ konst., während in Σ zwar der Betrag $|\hat{\vec{L}}| =$ konst. ist, nicht aber die Komponenten. Die Länge des Vektors ist eben unabhängig vom Koordinatensystem, aber nicht die Komponenten.

2 Gleichförmige Rotation

Wann ist $\hat{\vec{L}}$ auch in Σ konstant? Dazu müssen die Zeitableitungen der Komponenten von $\vec{\omega}$ in Σ konstant sein, also die Eulerschen Gleichungen sich reduzieren auf

$$(C-B)qr = 0$$

$$
\begin{aligned}
(A-C)pr &= 0 \\
(B-A)pq &= 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Für den *asymetrischen Kreisel* mit

$$
A \neq B,\ A \neq C,\ C \neq B \tag{7}
$$

sind alle drei Gleichungen erfüllt, wenn nur eine der Komponenten von $\vec{\omega}$ nicht verschwindet, d. h. wenn $\vec{\omega}$ die Richtung einer Hauptachse hat! In diesem Fall rotiert der Kreisel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um diese Hauptachse. Der Drehimpuls hat dieselbe Richtung und ist konstant, so dass auch im raumfesten System der Kreisel konstant um seine Hauptachse rotiert.

3 Stabilitätsanalyse

In diesem Fall ist es aber auch interessant, zu untersuchen, ob diese Rotation stabil gegen Störungen ist. Sei die Rotation mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit p_0 um die ξ-Achse gegeben, so dass in Σ $\vec{\omega}_0 = (p_0, 0, 0)$. Eine kleine Störung der Winkelgeschwindigkeit hat nun die Form

$$
\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega} = (p_0 + \Delta p, \Delta q, \Delta r) \tag{8}
$$

und wir können die Bewegungsgleichungen in erster Ordnung in den Störungen entwickeln:

$$
\begin{aligned}
A\Delta\dot{p} = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \Delta p = \text{konstant} \\
B\Delta\dot{q} + (A-C)p_0\Delta r &= 0 \\
C\Delta\dot{r} + (B-A)p_0\Delta q &= 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

Die Gleichungen lassen sich durch nochmaliges Differenzieren nach der Zeit entkoppeln:

$$
0 = B\Delta\ddot{q} + (A-C)p_0\Delta\dot{r} = B\Delta\ddot{q} + (A-C)p_0\frac{(A-B)}{C}\Delta q \tag{10}
$$

bzw.

$$
C\Delta\ddot{r} + \frac{(A-B)(A-C)}{B}p_0^2\Delta r = 0. \tag{11}
$$

Das ergibt die harmonische Bewegungsgleichung in beiden Fällen, da man mit der Abkürzung

$$
D^2 = \frac{(A-B)(A-C)}{BC}p_0^2 \tag{12}
$$

die identischen Beziehungen

$$
\Delta\ddot{q} + D^2\Delta q = 0, \qquad \Delta\ddot{r} + D^2\Delta r = 0 \tag{13}
$$

erhält. Da D^2 aber beide Vorzeichen haben kann, gibt es zwei Fälle:

- $D^2 > 0$: oszillierende Lösung: A ist maximales oder minimales Hauptträgheitsmoment. In diesem Fall wird die momentane Rotationsachse um die Hauptachse ξ herum oszillieren.

- $D^2 < 0$: exponentielle Lösung: A ist das mittlere Hauptträgheitsmoment. Da in der exponentiellen Lösung beide Vorzeichen des Exponenten vorkommen könne, wird der Kreisel zunehmend von der Rotationsachse abgelenkt, torkelt also weg (dabei wird die lineare Näherung irgendwann versagen).

Ein asymmetrischer Kreisel kann also nur um die Achse des minimalen und des maximalen Trägheitsmomentes stabil rotieren.

4 Der symmetrische kräftefreie Kreisel

Im Fall des symmetrischen Kreisels sind die Verhältnisse etwas komplizierter. O. B. d. A. können wir etwa annehmen, dass $A = B \neq C$. Dann ist ζ dir "Symmetrieachse": der Kreisel muss zwar nicht symmetrisch um diese Achse sein, aber das zugehörige Trägheitsellipsoid ist es. Senkrecht zu ζ ist jede Achse Hauptachse.

Nun vereinfachen sich die Gleichungen (1) zu

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= 0 \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= 0 \\ C\dot{r} = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad r = \text{konst.} = r_0 \end{aligned} \tag{14}$$

Durch geeignete Richtung der inneren ζ-Achse kann man immer $r_0 \geq 0$ erreichen. Die Gleichungen

$$\dot{p} + \frac{(C - A)}{A} r_0 q = 0, \qquad \dot{q} + \frac{(A - C)}{A} r_0 p = 0 \tag{15}$$

kann man zunächst mit der Abkürzung $\Omega = \frac{A-C}{A} r_0$ vereinfachen:

$$\dot{p} - \Omega q = 0, \qquad \dot{q} + \Omega p = 0 \tag{16}$$

und dann wieder durch Differenzieren entkoppeln.

$$\begin{aligned} \ddot{p} = \Omega \dot{p} = -\Omega^2 p \quad &\text{oder} \quad \ddot{p} + \Omega^2 p = 0 \\ \ddot{q} = -\Omega \dot{p} = -\Omega^2 q \quad &\text{oder} \quad \ddot{q} + \Omega^2 q = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Es handelt sich also um harmonische Oszillatoren, da $\Omega^2 \geq 0$ sein muss. Die Lösungen sind

$$p = \alpha \sin(\Omega t + \beta), \qquad q = \alpha \cos(\Omega t + \beta), \tag{18}$$

wobei Amplitude und Phase nur bei einer von beiden Lösungen gewählt werden kann; einsetzen in (16) zeigt, dass tatsächlich die beiden Lösungen dasselbe α und β enthalten müssen. Die Lösung für die Winkelgeschwindigkeit wird somit

$$\vec{\omega}_\Sigma = (\alpha \sin(\Omega t + \beta), \alpha \cos(\Omega t + \beta), r_0) \tag{19}$$

und hat konstanten Betrag wegen

$$\vec{\omega}^2 = \alpha^2 + r_0^2 \tag{20}$$

Also sind Lösungen mit einer regelmäßigen Rotation im Falle des symmetrischen Kreisels außer den konstanten Rotationen um die Hauptachsen auch solche, bei denen der Vektor ω mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Symmetrieachse kreist. Er beschreibt damit einen Kegel, den *Polkegel*.

Was mach der Drehimpuls? Mit dem diagonalen Trägheitstensor erhält man einfach

$$\vec{L} = (Ap, Aq, Cr) = (A\alpha \sin(\Omega t + \beta), A\alpha \cos(\Omega t + \beta), Cr_0) \tag{21}$$

Er beschreibt also genauso einen Kegel um die Symmetrieachse, den *Spurkegel*.