THEORETIKUM ZUR MECHANIK I WS 09/10

Aufgabenblatt 10 **15.1.2010**

Aufgabe 1:Kraftfelder (5+5 = 10 Punkte)

Untersuche, ob die Kraftfelder $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ konservativ sind und gib gegebenenfalls das zugehörige Potential an.

$$\vec{F}_1 = \left(y^2z^3 - 6xz^2\right)\vec{e}_x + 2xyz^3\vec{e}_y + \left(3xy^2z^2 - 6x^2z\right)\vec{e}_z \ ,$$
$$\vec{F}_2 = x^2yz\vec{e}_x - xyz^2\vec{e}_z \ .$$

Berechne, für die beiden Wege $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ (gerade Teilstücke zwischen den Punkten), die Arbeit, die aufgebracht werden muss bzw. frei wird, wenn man einen Punkt von $\vec{A} = (1,1,2)$ nach $\vec{B} = (2,2,2)$ bewegt.

$$\mathcal{C}_1 : \vec{A} \to (2,1,2) \to \vec{B} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{C}_2 : \vec{A} \to (1,2,2) \to \vec{B} \ .$$

Tipp: Um das Potential zur Kraft zu finden, sind partielle Integrationen notwendig, wie z.B. für die x-Komponente $V(x,y,z) = \int \frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{y,z} dx + g(y,z)$.

Aufgabe 2: Trigonometrische Funktionen mit komplexen Argumenten (2+2+2+2=8 Punkte)

Für komplexe Argumente $z \in \mathcal{C}$ seien die folgenden trigonometrischen Funktionen definiert

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ ,$$
$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \qquad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ .$$

Zeige

1. $i\sin z = \sinh iz \ , \quad \sin iz = i\sinh z \ , \quad \cos z = \cosh iz \ , \quad \cos iz = \cosh z \ .$
2. $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \ , \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \ , \quad e^z = \cosh z + \sinh z \ .$
3. $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_2)\cos(z_1) \ ,$
   $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \ . \quad (x, y \in \mathcal{R})$
4. $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \ , \quad |\sin z| \geq |\sin x| \ . \quad (z = x + iy \ , \ x, y \in \mathcal{R}) \ .$

Aufgabe 3: Hin und Zurück (7 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich zur Zeit $t = t_1$ in $x = x(t_1) = x_1$ und habe die Anfangsgeschwindigkeit $v = v(t_1) = v_1$. Auf das Teilchen wirke die Kraft

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} - k \cdot sgn(\dot{x}) \ ,$$

wobei $V(x)$ ein Potential, k eine positive Konstante und $sgn(v = \dot{x})$ die Signumfunktion sind. Unter dem Einfluss von F bewegt sich das Teilchen von x_1 bis $x(t = t_2) = x_2$, und kehrt dann zur Zeit t_3 zum Anfangspunkt $x(t = t_3) = x_1$ zurück. Sei die Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ positiv für $t_1 \leq t < t_2$, null für $t = t_2$ (Umkehrpunkt) und negativ für $t_2 < t \leq t_3$. Berechne die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit $t = t_3$.

<u>*Aufgabe 4: Taylorsche Reihenentwicklung*</u> (0.5+0.5+0.5+0.5+3 = 5 Punkte)

In der Physik auftretende Funktionen $f = f(x)$ lassen sich häufig* in Form einer Taylorreihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n \ ,$$

wobei $0! \equiv 1$ und $f^{(n)}(x_0) \equiv \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0}$. Dies ist besonders dann nützlich, wenn man sich für Argumente x nahe an x_0 interessiert. Dann kann man nämlich den Funktionswert $f(x)$ approximieren, indem man die Reihe nach wenigen Summanden abbricht. Der (abschätzbare) Fehler wird dabei natürlich um so kleiner, je mehr Summanden man mitnimmt.
Entwickle die Funktionen

$$\sin(x), \quad e^x \ , \ \ln(1+x) \ , \ (1+x)^\alpha \quad (\alpha \in \mathcal{R})$$

als Taylorreihen um die Stelle $x_0 = 0$. Gib dafür einmal die allgemeine Form an und entwickle die Funktionen dann jeweils bis zur 3. Ordnung.
Entwickle auch die Funktion

$$f(x) = \lambda(x^2 - F^2)^2$$

um ein Minimum bis zur 4. Ordnung (λ und F sind reelle Zahlen).
*Dabei muss f verschiedenen Bedingungen genügen, z.B. dass alle Ableitungen existieren und stetig sind, siehe Mathematikvorlesung.