THEORETIKUM ZUR MECHANIK I WS 09/10

Aufgabenblatt 12 **29.1.2010**

Aufgabe 1: Weg von der Erde (3+3+3 = 9 Punkte)

a) Ein Körper der Masse m werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ abgeschossen. Sei α der Winkel zwischen dem Anfangsgeschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ und dem Erdboden. Berechne die minimale Geschwindigkeit v_0 als Funktion von α, damit der Körper den Bereich der Erdanziehung verlässt.
b) Sei $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Wie klein sollte der Radius der Erde sein, damit v_0 Lichtgeschwindigkeit c betragen würde?
c) Sei $\alpha = 0$ und sei die Anfangsgeschwindigkeit $v > v_0(\alpha = 0)$. Auf welcher Bahn bewegt sich der Körper? Wie lautet seine Endgeschwindigkeit?

Aufgabe 2: Die Vier Jahreszeiten (10 Punkte)

Dem Perihel der Erdbahn sei der Polarwinkel $\varphi = 0$ zugeordnet. Der Polarwinkel bei *Frühlingsanfang* sei φ_1. Bei Sommer-, Herbst- und Winteranfang auf der Nordhalbkugel ist der Polarwinkel dann

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\,, \qquad \varphi_3 = \varphi_1 + \pi\,, \qquad \varphi_4 = \varphi_1 + \frac{3\pi}{2}\,.$$

Die genaue Dauer der Jahreszeiten beträgt

Frühling:	92 Tage	20,5 Stunden,
Sommer:	93 Tage	14,5 Stunden,
Herbst:	89 Tage	18,5 Stunden,
Winter:	89 Tage	0,5 Stunden.

Berechne daraus φ_1 und die numerische Exzentrizität ϵ der Erdbahn.

Anleitung: Der Perihel (Aphel) ist der Punkt der Erdbahn, in dem die Erde den kleinsten (größten) Abstand von der Sonne hat. Die numerische Exzentrizität ϵ einer Ellipse mit Halbachsen a, b $(a > b)$ ist gegeben durch $\epsilon^2 = 1 - (b/a)^2$. Der Parameter k der Bahn $r = \frac{k}{1+\epsilon\cos\varphi}$ ist gegeben durch $k = b^2/a$. Die Flächengeschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ ist konstant. Berechne die während der Jahreszeiten überstrichenen Flächen unter Vernachlässigung aller Terme quadratischer (oder höherer) Ordnung in ϵ. Gewinne daraus die gesuchten Größen.

Aufgabe 3: Kometenbahn (11 Punkte)

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn im Gravitationsfeld der ruhenden Sonne. Seine Bahnebene fällt mit der Ebene der als kreisförmig anzunehmenden Erdbahn zusammen. Der Abstand seines Perihels zur Sonne betrage ein Drittel des Erdbahnradius $R_E = 1,49 \cdot 10^{11}$ m. Wie lange bewegt sich der Komet innerhalb der Erdbahn? Gib das Ergebnis als Funktion von R_E, der Gravitationskonstante und der Erdmasse an.

Anleitung: Vernachlässige die Störung der Kometenbahn durch Planeten. Berechne die Zeit T_0, die der Komet vom Erdradius zu seinem Perihel benötigt, mittels

$$LT_0 = m\int_0^{T_0} r^2\dot{\varphi}\,dt$$

(Konstanz des Drehimpulses). Substituiere die Integrationsvariable gemäß $t \to \varphi \to r$, um als Integrationsgrenzen schließlich bekannte Größen zu erhalten. Den Wert des Drehimpulses bestimmt man am einfachsten im Perihel (benutze dabei den Energieerhaltungssatz).