THEORETIKUM ZUR MECHANIK I WS 09/10

Aufgabenblatt 3 **6.11.2009**

Aufgabe 1: $\vec{\nabla}$ -Gymnastik (6 Punkte = 2+2+2).
Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von $\vec{r}$ abhängige Vektoren. Beweise folgende Relationen:

$$
\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} + \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \vec{b}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) + \vec{a}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right) \\
\text{b)} \quad & \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) - \vec{a}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right) \\
\text{c)} \quad & \vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} - \vec{b}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \vec{a}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}\right)
\end{aligned}
$$

Gib in jedem Schritt an, auf welche Größe der Differentialoperator $\vec{\nabla}$ wirkt. Tipp: Nutze den Entwicklungssatz, die Produktregel der Differentialrechnung und die zyklische Invarianz des Spatproduktes aus.

Aufgabe 2: Kontinuität, Wirbel... (8 Punkte = 4+4).

a) Sei $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$ die Strömungsgeschwindigkeit und $\rho = \rho(\vec{r},t)$ die Dichte einer kompressiblen Flüssigkeit. Dann gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\,\vec{v}) = 0\ .$$

Zeige, daß, wenn die Dichte ρ nicht explizit von der Zeit abhängt, folgende Gleichung folgt:

$$|\vec{v}|\,\frac{\partial\rho}{\partial\hat{v}} = -\rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\ ,$$

wobei allgemein $\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}} \equiv \hat{n}\cdot\vec{\nabla}\phi$ die Richtungsableitung des skalaren Feldes ϕ in Richtung des Einheitsvektors $\hat{n}$ definiert.

b) Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{v}(x,y)$ einer zweidimensionalen Flüssigkeit sei gegeben durch $\vec{v}(x,y) = u(x,y)\vec{e}_1 - v(x,y)\vec{e}_2$.
Zeige, daß, wenn die Flüssigkeit inkompressibel ($\rho = const.$) und die Strömung wirbelfrei sind, gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Aufgabe 3: Elektrodynamik (10 Punkte = 5+5).
Im Vakuum lauten die Maxwell-Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0\ , & \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 0\ , \\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ , & \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ,
\end{aligned}
$$

wobei man $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$ die magnetische Induktion und $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$ das elektrische Feld nennt. Die Größen ε_0 und μ_0 sind die elektrische und die magnetische Feldkonstante.

a) Zeige, daß die Felder $\vec{B}$ und $\vec{E}$ im Vakuum der sogenannten homogenen Wellengleichung genügen, daß also gilt

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Anleitung: Beweise zunächst die für ein allgemeines Vektorfeld $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ gültige Relation

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) - \Delta\vec{a}$$

und wende sie dann auf diesen Fall an.

b) Das Vektorpotential $\vec{A}$ eines magnetischen Dipolmoments $\vec{m}$ ist gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \,.$$

Zeige, daßdas dazugehörige $\vec{B}-$Feld, das über $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ mit dem $\vec{A}-$Feld verknüpft ist, gegeben ist durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\,(\vec{m} \cdot \vec{r})\,\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3}\right] \,.$$

Anleitung: Beweise zunächst die für ein allgemeines Vektorfeld $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ und skalares Feld $\phi = \phi(\vec{r})$ gültige Relation

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a}\phi) = \phi\vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\nabla}\phi$$

und nutze sie sowie Relation c aus Aufgabe 1 aus. Das magnetische Moment $\vec{m}$ ist räumlich konstant.

Aufgabe 4: Krümmung (6 Punkte = 4+2).

Gegeben sei die Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ in der xy-Ebene.
a) Berechne den allgemeinen Ausdruck für die Krümmung κ als Funktion von t.
b) Berechne $\kappa(t)$ für den Fall $\vec{r}(t) = (R\cosh(\omega t), R\sinh(\omega t))$.