THEORETIKUM ZUR MECHANIK I WS 09/10

Aufgabenblatt 4 **13.11.2009**

Aufgabe 1: Magnetfeld (8 Punkte = 2+2+2+2)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{A} = (0, 0, f(x,y)) \ .$$

Berechne:
a) den Ausdruck für das Feld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$;
b) den Ausdruck für $\vec{B}$, wenn $f(x,y) = -\frac{c}{2}\log(x^2+y^2)$ (es ist instruktiv, die Vektoren für verschiedene Punkte auf der xy-Ebene zu zeichnen);
c) die Größe $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ für $f(x,y) = -\frac{c}{2}\log(x^2+y^2)$;
d) die Größe $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ für $f(x,y) = -\frac{c}{2}\log(x^2+y^2)$.

Aufgabe 2: Kommutative Gruppe der Drehungen um eine feste Achse (8 Punkte = 4+4)

Die Drehung des Koordinatensystems um den Winkel ϕ in der $xy-$Ebene wird beschrieben durch die Matrix

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

a) Zeige, daß $[D_\phi]^{-1} = D_{-\phi}$, $\mathbf{1} = D_{\phi=0}$, $D_\alpha D_\beta = D_{\alpha+\beta}$ und $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha$.
Tipp: Benutze die Additionstheoreme

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ ,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ .$$

b) Zeige, daß die Drehungen um zwei unterschiedliche Koordinatenachsen nicht kommutieren.

Aufgabe 3: Gruppe der orthogonalen $n \times n-$Matrizen (6 Punkte = 3+3)

a) Jede beliebige Drehung D erhält die Länge eines Vektors, $|\vec{r}| = |D \cdot \vec{r}|$ wobei $\vec{r} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Zeige, daß daraus die Orthogonalität von D folgt.

b) Zeige, daß die Matrizen A^{-1} und AB orthogonal sind, falls A und B es sind.
Anleitung: Zeige zunächst $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $(AB)^T = B^T A^T$.

Aufgabe 4: Die Uhr (8 Punkte = 4+4)

Gegeben sei eine Uhr, deren zwei Zeiger genau 3:00 Uhr zeigen.
a) Nach welcher Zeit sind die zwei Zeiger zum ersten Mal wieder orthogonal zueinander?
b) Nach welcher Zeit sind die zwei Zeiger zum ersten Mal zueinander parallel?