THEORETIKUM ZUR MECHANIK I WS 09/10

Aufgabenblatt 5 **20.11.2009**

Aufgabe 1: Inverse von Matrizen (7 Punkte = 2+2+3)

Es seien die folgenden drei Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2x+2 & 3x+5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} a & d & xa+yd \\ b & e & xb+ye \\ c & f & xc+yf \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechne die zugehörigen Inversen, falls sie existieren.

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme (8 Punkte = 3+5)

a) Es sei das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

gegeben. Löse es mit Hilfe der Cramerschen Regel.

b) Überprüfe, ob das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (1+\alpha)x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 8x_1 + (10+\alpha)x_2 + 12x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

nicht-triviale Lösungen besitzt. Falls ja, gib sie in der Form $\{x_1(x_3), x_2(x_3), x_3\}$ an.

Aufgabe 3: Bjorken-Koordinaten (8 Punkte = 4+4)

Durch

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{t^2 - z^2} \\ \eta &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right) \end{aligned}$$

sei eine Koordinatentransformation $(t, z) \to (\tau, \eta)$ für den Bereich $t > |z| > 0$ gegeben.

a) Skizziere qualitativ den Verlauf der $\tau-$ und der $\eta-$Koordinatenlinie in der $(t, z)-$Ebene.

b) Zeige, daß die Transformation für den Bereich $t > |z| > 0$ lokal umkehrbar ist.

(τ, η) nennt man *Bjorken-Koordinaten*. Sie werden bei der Beschreibung hochenergetischer Schwerionenkollisionen verwendet.

Aufgabe 4: Eine wichtige Trajektorie (7 Punkte = 4+3)

Sei $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ eine Bahn in der xy-Ebene, wobei $\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$ für $t = 0$ durch

$$\vec{r}(t=0) = \vec{0} \text{ und } \vec{v}(t=0) = (\dot{x}(t=0), \dot{y}(t=0)) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

gegeben sind. Außerdem seien für $d^2\vec{r}(t)/dt^2$ die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\ddot{x}(t) = 0,\ \ddot{y}(t) = -g,$$

wobei g eine reelle und positive Zahl ist.

a) Bestimme $\vec{r}(t)$. Skizziere den Verlauf von $\vec{r}(t)$.

b) Bestimme die Bahn als $y = y(x)$.