THEORETIKUM ZUR MECHANIK II SS 10

Lösungen zur Klausur **4.6.2010**

Aufgabe 1.2

a) Die Masse lautet

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \sigma r dr d\theta = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\sigma r dr = \sigma\pi \left(R_2^2 - R_1^2\right). \tag{1}$$

Also:

$$M = \sigma\pi \left(R_2^2 - R_1^2\right). \tag{2}$$

b) Traegheitsmoment:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \sigma r^2 r dr d\theta = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\sigma r^3 dr = \frac{\sigma\pi}{2} \left(R_2^4 - R_1^4\right) = \tag{3}$$

$$= \frac{\sigma\pi}{2} \left(R_2^2 - R_1^2\right) \left(R_2^2 + R_1^2\right) = M \frac{\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2}. \tag{4}$$

Also:

$$J = M \frac{\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2}. \tag{5}$$

c) Energie zur Zeit $t = 0$:

$$E = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \tag{6}$$

wobei

$$\omega = \frac{v_0}{R_2}. \tag{7}$$

Energie bei maximaler Hoehe:

$$E = Mgh. \tag{8}$$

Wegen Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} M \frac{\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{2} \frac{v_0^2}{R_2^2} = Mgh. \tag{9}$$

Das Resultat lautet:

$$h = \frac{v_0^2}{g} \left[\frac{1}{2} + \frac{\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{4R_2^2}\right]. \tag{10}$$

Die zurueckgelegte Strecke s ist:

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{v_0^2}{g \sin\alpha} \left[\frac{1}{2} + \frac{\left(R_2^2 + R_1^2\right)}{4R_2^2}\right]. \tag{11}$$

Aufgabe 2.2

a)

$$L = \frac{a}{2} t \dot{x}^2. \tag{12}$$

Die Ableitungen sind:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = at\dot{x}. \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(at\dot{x}\right) = a\left(\dot{x} + t\ddot{x}\right). \tag{15}$$

Die Bewegungsgl. lautet

$$\dot{x} + t\ddot{x} = 0. \tag{16}$$

Sei $\dot{x} = v$. Man hat:

$$v + t\dot{v} = 0. \tag{17}$$

Man loest es durch Trennung der Variablen (wobei die Anfangsbedingungen beruecksichtigt werden):

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'} = -\int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{t'} \to \ln\frac{v}{v_0} = \ln\frac{t_0}{t}. \tag{18}$$

$$v = v_0 \frac{t_0}{t}. \tag{19}$$

Weitere Integration, um x zu bekommen:

$$x = x(t) = \int_{t_0}^{t} v_0 \frac{t_0}{t'} dt' + x_0 = v_0 t_0 \ln\frac{t}{t_0} + x_0. \tag{20}$$

b)

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + \alpha x \dot{x}\ . \tag{21}$$

Der α-Term ist eine volle Ableitung

$$\alpha x \dot{x} = \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}(x^2). \tag{22}$$

Daher traegt nicht zur Bewegungsgl. bei.

Die Bewegungsgl. ist

$$\ddot{x} - \frac{k}{m}x = 0. \tag{23}$$

Wichtig: das Vorzeichen ist nicht das vom Pendel! sin und cos bilden nicht die richtige Basis fuer eine Loesung. Man arbeitet mit Exponentialfuntkionen:

$$x(t) = Ae^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \tag{24}$$

wobei A und B zwei reellen Zahlen sind, die dank der Anfangsbedingunen festgelegt werden:

$$x(0) = A + B = 0. \tag{25}$$

$$\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}(A - B) = v_0. \tag{26}$$

Einfache Algebra fuehrt zur Loesung:

$$x(t) = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\left(e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} - e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sinh\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \tag{27}$$

c) Ein moeglicher Lagrangian lautet:

$$L_1 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{c}{5}x^5 + xa\sin(\omega t). \tag{28}$$

Ein anderer ist:

$$L_2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{c}{5}x^5 + \frac{\dot{x}}{\omega}a\cos(\omega t). \tag{29}$$

Natuerlich ist die Differenz $L_2 - L_1$ eine volle Ableitung:

$$L_2 - L_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{xa}{\omega}\cos(\omega t)\right). \tag{30}$$

Allgemeiner Lagrangian, der zu der Bewegungsgl. fuehrt:

$$L = kL_1 + \frac{d}{dt}f(x,t) \tag{31}$$

wobei k eine Konstante ist, und $f = f(x,t)$ eine beliebige Funktion von t und x ist.

Aufgabe 3.2

a) Bewegungsgleichungen fuer x und y :

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda x(x^2 + y^2); \tag{32}$$
$$m\ddot{y} = -ky - \lambda y(x^2 + y^2). \tag{33}$$

b) Sei

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Natuerlich

$$x'^2 + y'^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + (-x\sin\theta + x\cos\theta)^2 = x^2 + y^2. \tag{35}$$

Wenn man ableitet:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

was bedeutet:

$$\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2. \tag{37}$$

Der Lagrangian ist invariant:

$$L(x,y) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2) - \frac{\lambda}{4}(x^2 + y^2)^2 = \tag{38}$$
$$\frac{m}{2}\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) - \frac{k}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{\lambda}{4}(x'^2 + y'^2)^2 \tag{39}$$
$$= L(x', y'). \tag{40}$$

Physikalisch ist diese Transformation eine Rotation auf der Ebene.

c) Man betrachtet eine infinitesimale Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{41}$$

$$x' = x + \theta y \rightarrow \delta x = \theta y \tag{42}$$
$$y' = y - \theta x \rightarrow \delta y = -\theta x \ . \tag{43}$$

Der Noether-Strom (erhaltene Groesse) ist:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta y = \theta m \left(\dot{x} y - \dot{y} x \right) . \tag{44}$$

θ ist eine beliebige Konstante, die ausgelassen werden kann. Die erhaltene Groesse ist

$$L_z = m \left(\dot{x} y - \dot{y} x \right) , \tag{45}$$

was eben der Drehimpuls in der z-Richtung darstellt.

Theoretische Fragen:
1.1) Seiten 170-171vom M-I Skript:
http://th.physik.uni-frankfurt.de/~drischke/Skript.pdf

2.1) Seiten 11-12 vom M-II Skript:
http://th.physik.uni-frankfurt.de/~drischke/Skript_M2_31_05_2010.pdf

3.1) Seiten 46-47 vom M-II Skript
http://th.physik.uni-frankfurt.de/~drischke/Skript_M2_31_05_2010.pdf