THEORETIKUM ZUR MECHANIK II SS 10

Aufgabenblatt 10 **25.06.2010**

Aufgabe 10.1: Mischung (13 = 1 + 2 + 5 + 2 + 3 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}\omega_1^2 x^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2 y^2 - \varepsilon xy. \tag{1}$$

1. Bestimme die Bewegungsgleichungen.
2. Führe die folgende Koordinatentransformation ein:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \tag{2}$$

   Wie lautet die neue Lagrange-Funktion?

3. Wie muss θ aussehen, damit die neue Lagrange-Funktion die Form

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) - \frac{1}{2}\omega_1'^2 x'^2 - \frac{1}{2}\omega_2'^2 y'^2 \tag{3}$$

   annimmt? Bestimme dabei die Größen $\omega_1^{'}$ und $\omega_2^{'}$.

4. Bestimme die Hamilton-Funktion $H(x, y, p_x, p_y)$, die aus der Lagrange-Funktion (1) folgt.
5. Wie lautet die erzeugende Funktion F, die die Transformation von (2) generiert? Wie transformieren sich die Impulse? (Die kanonische Transformation verbindet die altenkanonischen Variablen (x, y, p_x, p_y) mit den neuen (x', y', p_x', p_y')).

Aufgabe 10.2: Hamilton-Jacobi-Formalismus (9 = 1 + 1 + 2 + 3 + 2 Punkte)

Wende den Hamilton-Jacobi-Formalismus auf das Zentralkraftproblem an. Zur Orientierung könnte das in der Vorlesung besprochene Beispiel des harmonischen Oszilators hilfreich sein. Gehe dabei folgendermaßen vor:

1. Bestimme die Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion für ein Teilchen in einem allgemeinen Potential $V = V(r)$. Wähle hierzu geeignete Koordinaten.
2. Ersetze die Impulse p_i in H durch $\partial S/\partial q_i$ und addiere $\partial S/\partial t$, um die Hamilton-Jacobi-Gleichung aufzustellen.
3. Separiere durch einen geeigneten Ansatz für S die Zeit:

$$S(r, \phi, \alpha_1, \alpha_2, t) = S_{r,\phi}(r, \phi, \alpha_1, \alpha_2) + \alpha_1 t. \tag{4}$$

   Welche Bedeutung hat die Konstante α_1?

4. Bestimme α_2 und S in Abhängigkeit des allgemeinen Potentials $V(r)$, trenne hierzu die restlichen Variablen durch folgenden Ansatz:

$$S_{r,\phi}(r, \phi, \alpha_1, \alpha_2) = S_r(r, \alpha_1, \alpha_2) + S_\phi(\phi, \alpha_1, \alpha_2). \tag{5}$$

5. Berechne für das Keplerpotential $V(r) = -c/r$ die Parameter α_i und ihre konjugierten Variablen $\beta_i = \partial S/\partial \alpha_i$. Zeige, dass aus ihnen die Keplerbahnen folgen.

Aufgabe 10.3: Erzeugende Funktion (8 = 4 + 4 Punkte)

Betrachte ein Teilchen mit Masse $m = 1/2$, das sich im Potential $V(x) = e^x$ entlang der x-Achse bewegt.

a) Wie lautet die erzeugende Funktion $F_2(x, P)$, welche die Hamilton-Funktion $H(x, p)$ des Teilchens auf die Form $K(P) = \frac{P^2}{4}$ transformiert?
b) Bestimme die Transformationsgleichungen und finde die Lösungen $x(t)$ und $p(t)$.