THEORETIKUM ZUR MECHANIK II SS 10

Aufgabenblatt 4 **7.05.2010**

Aufgabe 4.1: Äquivalente Lagrange-Funktionen (8 = 6 + 2 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x) + \frac{dg(x,t)}{dt} \ , \tag{1}$$

wobei g eine beliebige, differenzierbare Funktion von x und t ist.
(i) Bestimme die Bewegungsgleichung für die Variable x. Was kann man daraus lernen?
(ii) Warum stimmen die Bewegungsgleichungen, die aus den Lagrange-Funktionen $L_1 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$ und $L_2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x) + x\dot{x}$ folgen, überein?

Aufgabe 4.2: Reibung im Lagrangian (11 = 3 + 5 + 3 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L = f(t)\left(\frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy\right) \ , \tag{2}$$

wobei $f(t)$ eine beliebige, differenzierbare Funktion von t ist.
(i) Bestimme die Bewegungsgleichung für die Variable y.
(ii) Wie muß $f(t)$ aussehen, damit in der Bewegungsgleichung eine Reibungskraft $F_r = -\alpha\dot{y}$ entsteht? Löse auch die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$.
(iii) Wie muß $f(t)$ aussehen, damit in der Bewegungsgleichung eine stetig wachsende Reibungskraft $F_r = -\alpha t\dot{y}$ entsteht?

Aufgabe 4.3: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld (11 = 3 + 4 + 2 + 2 Punkte)

1. Wir haben die Lagrange-Gleichungen 2. Art

   $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \ , \qquad L = T - V \ , \ j = 1, \ldots, S \ ,$$

   für die Lagrange-Funktion $L = T - V$ mit einem Potential V kennengelernt, das eine Funktion der generalisierten Koordinaten und der Zeit ist, $V = V(q_1, \ldots, q_S, t)$. Für die generalisierten Kraftkomponenten gilt dann $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$. Dieses Konzept soll nun auf sogenannte *verallgemeinerte Potentiale* $U = U(q_1, \ldots, q_S, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S, t)$ ausgeweitet werden.

   Welcher Zusammenhang muss zwischen diesen verallgemeinerten Potentialen und den generalisierten Kräften gelten, damit für $L = T - U$ die obigen Lagrange-Gleichungen 2. Art unverändert gültig sind?

2. Neben der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der magnetischen Feldstärke $\vec{B}$ bedient man sich zur Beschreibung elektromagnetischer Erscheinungen gerne des *skalaren Potentials* $\varphi(\vec{r}, t)$ und des *Vektorpotentials* $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

   Zeige, dass die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q\left[-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right]$ im Rahmen des Lagrange-Formalismus durch das verallgemeinerte Potential

   $$U = q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

   beschrieben werden kann.

3. Wie lautet der generalisierte Impuls eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld?

4. Der generalisierte Impuls wird im Allgemeinen nicht mit dem Linearimpuls $p_{lin} = mv$ übereinstimmen, er muss nicht einmal die Dimension eines Impulses besitzen. Zeige, dass das Produkt der generalisierten Koordinate und des dazugehörigen generalisierten Impulses hingegen immer die Dimension [Wirkung] = [Energie $\times$ Zeit] trägt.