THEORETIKUM ZUR MECHANIK II SS 10

Aufgabenblatt 5 **14.05.2010**

Aufgabe 5.1: Landschaftsprofil (12 = 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 Punkte)

Wir betrachten eine zweidimensionale Welt, in der Entfernungen entlang der $x-$Achse und Höhenunterschiede entlang der $y-$Achse gemessen werden. Gegeben sei ein stetig differenzierbares Landschaftsprofil, das durch die Gleichung $y = f(x)$ beschrieben wird. Ein Teilchen der Masse m befinde sich auf dem Profil. Die auf das Teilchen wirkende Schwerkraft ist $\vec{F} = (0, -mg)$.

(a) Schreibe die Lagrange-Funktion des Systems als Funktion der Variablen x. Wie lautet die entsprechende Bewegungsgleichung?

(b) Schreibe die Lagrange-Funktion des Systems als Funktion der Variablen

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{df(x')}{dx'}\right)^2} dx' \ .$$

Wie lautet die entsprechende Bewegungsgleichung?

(c) Sei $f(x) = -ax$ und $x_0 = 0$. Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Variable s? Löse die Gleichung und erkläre, warum das Resultat zu erwarten war.

(d) Sei $f(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R < x < R)$ und $x_0 = 0$. Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Variable s? Löse die Gleichung für kleine s. Erläutere den Zusammenhang zwischen diesem Fall und dem Pendel.

(e) Sei $f(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ $(x \geq 1)$ und $x_0 = 1$. Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Variable s? Löse die Gleichung für große s.

(f) Welche Differentialgleichung muss die Profilfunktion $f(x)$ erfüllen, damit die Bewegungsgleichung für die Variable s die Form $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$ annimmt? Löse die Differentialgleichung und gebe die explizite Form der Lösung als $x = x(f)$ an. Durch eine graphische Invertierung kann die Funktion $f = f(x)$ dargestellt werden. Vergleiche diese Funktion mit der Funktion $f(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ aus Aufgabenteil (d). Für welchen Wert von R hat dieser Vergleich Sinn?

Aufgabe 5.2: Kegel (10 = 1+ 1 + 2 +3 +3 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse m gleitet entlang der inneren Seite eines Kegels, dessen Öffnungswinkel 2α beträgt. Weiterhin wirkt die Schwerkraft auf den Massenpunkt (siehe Abbildung).

(a) Bestimme die Anzahl der Freiheitsgrade und die Zwangsbedingungen.

(b) Wie lautet die Lagrange-Funktion L in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) ?

(c) Gebe die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für φ und z an. Eliminiere die Koordinate φ aus den Bewegungsgleichungen mittels der z-Komponente L_z des Drehimpulses $\vec{L}$ bezüglich des Koordinatenursprungs. Bestimme die Zeitabhängigkeit von L_z .

(d) Zeige, dass Kreisbahnen ebenfalls eine Lösung der Bewegungsgleichungen darstellen. Welche Anfangsbedingungen sind notwendig, um solche Kreisbahnen als Lösung zu ermöglichen?

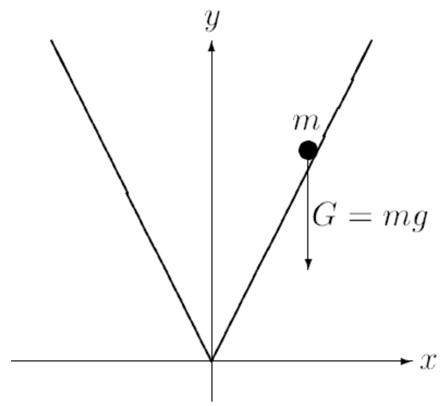

Abbildung 1: Masse in der Kegel

(e) Für kleine Variationen in z-Richtung $z(t) = z_0 + \zeta(t)$ mit $\zeta(t) \ll z_0$ können die Bewegungsgleichungen näherungsweise gelöst werden, indem man z^{-3} um z_0 entwickelt und nach dem linearen Term abbricht. Bestimme diese Lösung.

Aufgabe 5.3: Lagrange-Gleichung 1. Art (8 = 4 + 4 Punkte)

Untersuche die Problemstellung in Aufgabe 1.1 und in Aufgabe 2.3 genauer. Identifiziere die Zwangsbedingungen und bestimme die resultierenden Zwangskräfte. Verwende hierzu die Lagrange-Gleichung 1. Art.