THEORETIKUM ZUR MECHANIK II SS 10

Aufgabenblatt 6 **21.05.2010**

Aufgabe 6.1: x^4 (12 = 2 + 3 +3 +4 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion ($\lambda > 0$)

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 x^2 - m\frac{\lambda}{4}x^4. \tag{1}$$

1. Bestimme die Bewegungsgleichung für x und erkläre, warum diese nichtlinear ist.

2. Für ein oszillierendes Teilchen seien die Anfangsbedingungen

   $$x(t=0) = -a, \text{ wobei } a > 0 \text{ und } \dot{x}(t=0) = 0.$$

   Gib den exakten Ausdruck der Periode $T = T(a)$ in Form eines Integrals an. (Hinweis: Benutze die Energieerhaltung.) Wie lautet $T(a)$ im Limes $\lambda \to 0$?

3. Eine approximierte Form der Funktion $T(a)$ kann durch Linearisierung der Bewegungsgleichung abgeleitet werden. Dazu wird der kubische Term λx^3 in der Bewegungsgleichung wie folgt approximiert:

   $$\lambda x^3 \to \lambda \left\langle x^2 \right\rangle x, \text{ wobei } \left\langle x^2 \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t')dt'.$$

   Bestimme und zeichne die Funktion $T = T(a)$, die man auf diese Weise bekommt.

4. Störungstheorie: Nimm für die in Aufgabenteil 1 abgeleitete Bewegungsgleichung den Ansatz

   $$x(t) = -a\cos\omega t + \lambda h(t)$$

   und bestimme die Differentialgleichung, die $h(t)$ erfüllen muss, wenn nur Terme bis Ordnung λ berücksichtigt werden. Löse diese Differentialgleichung und bestimme auf diesem Weg die Periode $T(a)$. Vergleiche dieses Resultat mit dem Ergebnis von Teil 2. Verwende, dass $\cos^3\omega t = \frac{1}{4}\cos 3\omega t + \frac{3}{4}\cos\omega t$.

Aufgabe 6.2: Kräftefreies Teilchen auf einer Geodäte (10 = 5 + 5 Punkte)

1. Ein Teilchen wird durch Zwangskräfte auf krummlinige Bahnkurven gezwungen, bewegt sich aber ansonsten kräftefrei. Zeige, dass dann für das Teilchen die Bewegung auf einer Geodäte folgt.

   Als Geodäte γ bezeichnen wir dabei die kürzeste mit den Zwangsbedingungen verträgliche Raumkurve, die zwei Punkte verbindet. Sie läßt sich also durch die Gleichung

   $$\delta \int_\gamma ds = 0$$

   definieren, wobei s die Bogenlänge der Raumkurve ist, siehe Nolting I, Abschnitt 1.2.3.

   Anleitung: Formuliere das Hamiltonsche Prinzip für dieses Problem. Benutze darin $\frac{ds}{dt} = const.$

2. Zeige, dass ein Teilchen, welches durch Zwangskräfte auf einer Kugeloberfläche gehalten wird, aber ansonsten kräftefrei ist, sich immer auf Großkreisen bewegt.
   Als Großkreis bezeichnet man einen Kreis auf einer Kugeloberfläche, dessen Mittelpunkt mit dem der Kugel übereinstimmt.

Anmerkung: Die allgemeine Relativitätstheorie definiert die Raummetrik derart, dass die Bahnen, auf denen sich Teilchen unter dem Einfluss der Gravitation bewegen, zu geodätischen Linien werden. Die Bewegung ist kräftefrei, die Gravitation bewirkt nur die Raumkrümmung.

Aufgabe 6.3: Sattelpunkt der Wirkung S beim harmonischen Oszillator (8 Punkte)

Zeige, dass die Wirkung

$$S = \int_0^{t_2} \left[\frac{m}{2} \dot{x}_0^2 - \frac{D}{2} x_0^2 \right] dt$$

des harmonischen Oszillators (mit der Federkonstante D) für die Bewegung

$$x_0(t) = a \sin(\omega t) \qquad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

weder minimal noch maximal ist, falls t_2 größer als die halbe Schwingungsdauer $T/2$ ist.

Anleitung: Setze

$$x_\alpha(t) = x_0(t) + \alpha \eta(t) \qquad \text{mit } \eta(0) = \eta(t_2) = 0$$

in S ein und sortiere nach Potenzen von α. Zeige mit partieller Integration, dass die Terme, die linear in α sind, verschwinden. Forme auch die zu α^2 proportionalen Terme mit Hilfe partieller Integration um. Analysiere sie dann an Hand des folgenden Ansatzes für die Abweichungen $\eta(t)$

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{t_2} t\right) ,$$

wobei b_k beliebige Konstanten sind.