THEORETIKUM ZUR MECHANIK II SS 10

Aufgabenblatt 7 **28.05.2010**

Aufgabe 7.1: Zeitdilatation (12 = 1 + 3 +3 + 3 + 2 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{c}{x^2} \ . \tag{1}$$

1. Bestimme die Bewegungsgleichung für x.
2. Bestimme und zeichne die Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0 > 0$, $\dot{x}(0) = 0 > 0$. (Benutze die Energieerhaltung.)
3. Gegeben sei die folgende Transformation (Zeitdilatation):
$$t \to \lambda t \ , \tag{2}$$
wobei λ eine beliebige positive Konstante ist. Wie muß die Variable $x = x(t)$ transformieren, damit das System symmetrisch unter dieser Transformation ist?
4. Bestimme den entsprechenden Noether-Strom J. Verifiziere durch die explizite Lösung des zweiten Aufgabenteils, dass J tatsächlich erhalten ist.
5. Ist das Potential $V(x) = \frac{c}{x^2}$ das einzige, das eine Symmetrie des Systems unter Zeitdilatation impliziert?

Aufgabe 7.2: m groß, m klein, (8 = 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

1. Gegeben sei die Lagrange-Funktion
$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \ . \tag{3}$$
Bestimme und diskutiere die Lösung der Bewegungsgleichung im Limes $m \to \infty$ für die Anfangsbedingungen (i) $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ und (ii) $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0 \neq 0$.
2. Diskutiere den Limes $m \to \infty$ im allgemeinen Fall $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$ (wobei $V(x)$ nicht von m abhängt).
3. Gegeben sei die Lagrange-Funktion ($\lambda > 0$, $\alpha > 0$)
$$L = e^{\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right) \ , V(x) = \frac{\lambda}{4}(x^2 - F^2)^2. \tag{4}$$
Bestimme die Bewegungsgleichung. Zeichne, ohne Rechungen durchzuführen, den qualitativen Verlauf der Lösung der Bewegungsgleichung im Limes $m \to 0^+$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ mit $|x_0| \leq \sqrt{2}F$ und $\dot{x}(0) = 0$. Was passiert für $|x_0| > \sqrt{2}F$?
4. Diskutiere den Limes $m \to 0^+$ im allgemeinen Fall $L = e^{\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right)$ (wobei $V(x)$ nicht von m abhängt).

Aufgabe 7.3: Fallendes Seil (10 = 5 + 5 Punkte)

Ein bewegliches Seil der Länge l hat einen Knick an der Stelle x und bewege sich im Schwerefeld der Erde (siehe Abbildung). Die Dichte ρ ist über die gesamte Länge des Seils konstant.

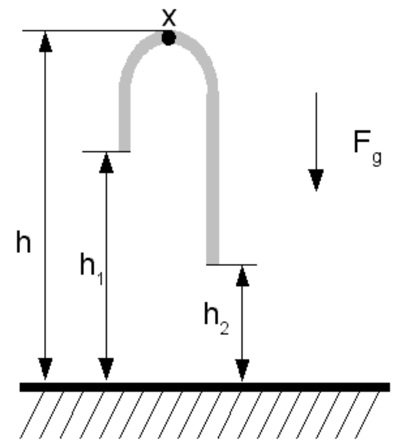

Abbildung 1: Seil.

1. Bestimme die Bewegungsgleichungen der beiden Seilenden, verwende hierzu die generalisierten Koordinaten h_1 und h_2.

2. Finde die Bewegungsgleichung für die Knickstelle x, substituiere hierfür $h_1 - h_2 = x$. Was passiert mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$, wenn x auf eines der Enden trifft?

Anleitung: Bringe das Gleichungssystem aus dem ersten Aufgabenteil in eine Form, in der die angegebene Substitution Sinn ergibt. Löse das Gleichungssytem durch Eliminieren von $\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2$. Folgende Formel ist für das Finden der Bewegungsgleichung hilfreich: $d/dt \ln x = \ddot{x}/\dot{x}$.