

Aufgabe 9.1: H und E (8 = 4 + 4 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion ($a > 0$)

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + axt . \quad (1)$$

1. Wie lautet die entsprechende Hamilton-Funktion? Entspricht die Hamilton-Funktion der Gesamtenergie E des Systems? Ist die Hamilton-Funktion erhalten?
2. Bestimme die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und gebe die allgemeine Lösung an.

Aufgabe 9.2: Poisson-Klammern (10 = 2 + 3 + 3 + 2 Punkte)

1. Berechne die folgenden Poisson-Klammern:

$$\{q, F(q)\}, \{q, G(p)\}, \{F(q), p\}, \{G(p), p\}, \{q^n, p^m\} . \quad (2)$$

2. Gegeben sei die Hamilton-Funktion

$$H = H(q, p, t) = q^2 p^2 t . \quad (3)$$

Bestimme mit Hilfe der Poisson-Klammer die entsprechende Erhaltungsgröße.

3. Leite die Hamilton-Gleichungen ab und löse sie für die Anfangsbedingungen $q(0) = q_0, p(0) = p_0$. (Hinweis: benutze die Erhaltungsgröße vom vorherigen Aufgabenteil).
4. Gegeben sei die folgende Hamilton-Funktion:

$$H = H(q, p, t) = F(q, p)g(t). \quad (4)$$

Wie lautet in diesem Fall die Erhaltungsgröße?

Aufgabe 9.3: Transformationen (12 = 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m \frac{\dot{x}^2}{(1+x^2)^2} - k \arctan x. \quad (5)$$

1. Bestimme die Bewegungsgleichung.
2. Substituiere in der Bewegungsgleichung $x = \tan y$. Wie sieht die Bewegungsgleichung als Funktion von y aus?
3. Substituiere $x = \tan y$ direkt in der Lagrange-Funktion (5). Damit bekommt man eine neue Lagrange-Funktion $L' = L'(y, \dot{y})$, wobei $L'(y = \tan x, \dot{y} = \frac{d}{dt}(\tan x)) = L(x, \dot{x})$. Bestimme die Bewegungsgleichung für die Variable y , die aus $L' = L'(y, \dot{y})$ folgt. Stimmt sie mit der Differentialgleichung für die Variable y , die im zweiten Aufgabenteil erhalten wurde, überein?
4. Bestimme die Hamilton-Funktion $H(x, p_x)$, die aus $L(x, \dot{x})$ folgt.
5. Welche erzeugende Funktion F wird gebraucht, um die Transformation $x = \tan y$ zu erzeugen? (Dabei muss es sich um eine kanonische Phasentransformation handeln, die die alten Variablen (x, p_x) mit den neuen Variablen (y, p_y) verbindet.)
6. Wie lautet der neue Impuls p_y als Funktion von x und p_x ?