KLAUSUR ZUR MECHANIK II SS 10

4.6.2010

Aufgabe 1: Starrer Körper (10 Punkte)

1. Theoretische Frage (3 Punkte).

   Was ist ein starrer Körper und wie bestimmt man die Anzahl seiner Freiheitsgrade?

2. Aufgabe ($7 = 1 + 3 + 3$ Punkte).

   Gegeben sei eine flache Scheibe mit einem Loch in der Mitte und konstanter Flächendichte σ, R_1 ist der innere und R_2 der äußere Radius, siehe Abbildung.

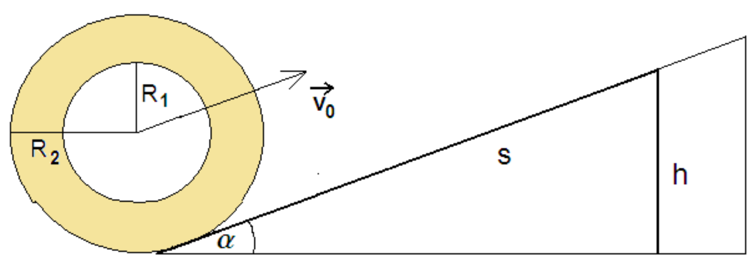

Abbildung 1: Scheibe

   (a) Bestimme die Masse M der Scheibe als Funktion von σ, R_1 und R_2.

   (b) Berechne das Trägheitsmoment J der Scheibe in Abhängigkeit von M, R_1 und R_2.

   (c) Die Scheibe rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α hinauf. Der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes sei v_0. Bestimme die Höhe h, die die Scheibe erreicht, als Funktion von R_1, R_2 und v_0. Welche Strecke s legt sie dabei zurück?

Aufgabe 2: Lagrange-Gleichungen (10 = Punkte)

1. Theoretische Frage (4 Punkte).

   Zeige, wie man anhand des d' Alembertschen Prinzips die Lagrange-Gleichung herleiten kann.

2. Aufgabe ($6 = 2 + 2 + 2$ Punkte).

   (a) Gegeben sei die Lagrange-Funktion ($a \neq 0$)

$$L = \frac{a}{2} t \dot{x}^2 \ . \tag{1}$$

   Bestimme die Bewegungsgleichung und löse sie für die Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0 > 0$ und $\dot{x}(t_0) = v_0 > 0$ ($t_0 > 0$).

(b) Gegeben sei die Lagrange-Funktion ($m > 0$, $k > 0$, $\alpha \neq 0$)

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + \alpha x\dot{x} \; . \tag{2}$$

Bestimme die Bewegungsgleichung und erkläre warum sie nicht von α abhängt. Löse die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

(c) Gegeben sei die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -cx^4 + a\sin\omega t \; . \tag{3}$$

Aus welcher Lagrange-Funktion erhält man diese Bewegungsgleichung? Ist diese Lagrange-Funktion eindeutig, oder gibt es andere, die diese Bewegungsgleichung erzeugen? Wenn ja, gib eine weiter an.

Aufgabe 3: Symmetrien, Noether-Theorem (10 Punkte)

1. Theoretische Frage (3 Punkte).

   Was ist die Kernaussage des Noether-Theorems?

2. Aufgabe (7 = 2 + 2 + 3 Punkte).

   Gegeben sei die folgende Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von x und y :

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \; - \frac{\lambda}{4}(x^2 + y^2)^2 \; . \tag{4}$$

   (a) Bestimme die Bewegungsgleichungen für x und y.

   (b) Zeige, dass die Lagrange-Funktion unter folgender Transformation invariant ist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; . \tag{5}$$

   Was bedeutet diese Transformation physikalisch?

   (c) Leite die dazugehörige Erhaltungsgröße her (Noether-Strom).